Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 8 - Piattezza

Nel seguito, se non specificato altrimenti, consideriamo moduli su un fissato anello commutativo unitario A.

1. Sia

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[d, "\gamma"'] \\ L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \end{tikzcd}$$

   un diagramma commutativo con righe esatte.

   Mostrare che se γ è iniettivo, si ha

$$Im(\beta) \cap Im(f') = Im(\beta f) = Im(f'\alpha).$$

2. Sia M un A-modulo piatto. Mostare che:

$$(L \cap N) \otimes M = (L \otimes M) \cap (N \otimes M).$$

   In particolare, per ogni parte moltiplicativa $S \subseteq A$:

$$(L \cap N)_S = L_S \cap N_S.$$

   Suggerimento: Considerare il diagramma

$$\begin{tikzcd} L \cap N \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & L/(L \cap N) \arrow[d] \\ N \arrow[r] & L + M \arrow[r] & (L + M)/N \end{tikzcd}$$

   tensorizzare con M ed applicare l'esercizio precedente.

3. Mostrare che la piattezza è una *proprietà locale*. Ovvero:

   M è piatto su $A \Leftrightarrow M_{\mathrm{p}}$ è piatto su A_{p}, per ogni $\mathrm{p} \in Spec(A) \Leftrightarrow M_{\mathrm{m}}$ è piatto su A_{m}, per ogni $\mathrm{m} \in Max(A)$.

4. Sia A un dominio con campo dei quozienti K, e sia B un sopra-anello di A, cioè $A \subseteq B \subseteq K$.

   Mostrare che B è una A-algebra piatta se e soltanto se $B_Q = A_{A\cap Q}$, per ogni $Q \in Spec(B)$.

   Suggerimento: Usare la proprietá locale della piattezza.

   Per mostrare che, quando B è piatto su A, si ha $B_Q \subseteq A_{A\cap Q}$ usare gli Esercizi 7.2 e 8.2: Sia $x = b/s \in B_Q$, $b \in B$, $s \in B \setminus Q$. Allora $s \in B \cap (B :_K xB) = (A \cap (A :_A xA))B = (A :_A A + xA)B$. Dunque $s = y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n$, con $y_i \in (A :_A A + xA)$, $b_i \in B$. Siccome $s \notin Q$, almeno uno degli y_i non sta in $A \cap Q$. Ma $y_i x \in A$, quindi $x = y_i x / y_i \in A_{A\cap Q}$.

5. *Transitività della piattezza.* Siano A, B anelli. Sia N un A-modulo e M un (A, B)-modulo. Mostrare che, se N è piatto su A e M è piatto su B, allora il B-modulo $N \otimes_A M$ è piatto su B.

   Dedurne che:

   (a) Il prodotto tensiorale di due A-moduli piatti è un A-modulo piatto.

   (b) Se B è una A-algebra piatta e N è un A-modulo piatto, allora il B-modulo $B \otimes_A N$ è piatto su B.

   (c) Se B è una A-algebra piatta e M è un B-modulo piatto, allora M è anche piatto su A. In particolare, data un'estensione di algebre $A \subseteq B \subseteq C$, se B è piatta su A e C è piatta su B, allora C è piatta su A.

   Suggerimento: Ricordare che: $N \otimes_A M$ è un B-modulo con la moltiplicazione scalare $(n \otimes m)b = n \otimes mb$; $M \otimes_B L$ è un A-modulo con la moltiplicazione scalare $a(m \otimes l) = am \otimes l$, per ogni B-modulo L, e $(N \otimes_A M) \otimes_B L \cong N \otimes_A (M \otimes_B L)$ (Esercizio 4.9).

6. Sia $S \subseteq A$ una parte moltiplicativa. Dimostrare che M è piatto su A se e soltanto se M_S è piatto su A_S.