Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 9 - Ideali radicali e ideali primari

Nel seguito A denota un anello commutativo unitario non nullo, I, J sono ideali di A e $\sqrt{I} = \{a \in A\,;\ \text{esiste } n \geq 0 \text{ tale che } a^n \in I\}$ è il *radicale* di I.

1. Verificare le seguenti proprietà:
   (a) $\sqrt{I} = A$ se e soltanto se $I = A$;
   (b) Se $I \subseteq J$, allora $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$;
   (c) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;
   (d) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \supseteq \sqrt{I}\sqrt{J}$;
   (e) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$;
   (f) $\sqrt{I^e} \supseteq (\sqrt{I})^e$; $(\sqrt{J})^c = \sqrt{J^c}$.
   (g) Se $J^n \subseteq I \subseteq J$ per qualche $n \geq 1$, allora $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

2. Si consideri l'estensione e la contrazione degli ideali $I \subseteq A$ rispetto al morfismo canonico $A \longrightarrow A_S$. Mostrare che:
   (a) $I \cap S = \emptyset$ se e soltanto se $\sqrt{I} \cap S = \emptyset$;
   (b) $\sqrt{I^e} = (\sqrt{I})^e$; $\sqrt{I^{ec}} = (\sqrt{I})^{ec}$;
   (c) $(\sqrt{J})^c = \sqrt{J^c}$; $\sqrt{J^{ce}} = (\sqrt{J})^{ce}$.

3. Mostrare con esempi che se P è un ideale primo, P^e può essere primario ma non primo, oppure non primario.

   Suggerimento: Considerare $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$.

4. Mostrare che $I + J = A$ se e soltanto se $\sqrt{I} + \sqrt{J} = A$. Dedurne che, se $I + J = A$ allora $I^n + J^m = A$, comunque scelti $n, m \geq 1$.

5. Supponiamo che A sia un dominio a ideali principali e sia $a \in A \setminus \mathcal{U}(\mathcal{A})$. Mostrare che, se $a = {p_1}^{e_1} \cdots {p_n}^{e_n}$, $n \geq 1$, è la fattorizzazione di a in elementi primi, allora $\sqrt{(a)} = (p_1 \cdots p_n)$.

   Dedurne che l'anello quoziente $\frac{A}{(a)}$ è ridotto se e soltanto se a non è diviso da alcun quadrato.

6. Sia P un ideale primo di A. L'ideale $P^{(n)} := P^n A_P \cap A$ si dice l'n-sima *potenza simbolica* di P. Mostrare che $P^{(n)}$ è un ideale P-primario.

7. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo e si consideri l'ideale $M := (p, X)$ di $\mathbb{Z}[X]$. Mostrare che M è un ideale massimale e che l'ideale $I := (p^2, X)$ è M-primario.

8. Sia P un ideale primo di A e sia $\phi_P : A \longrightarrow A_P\,,\ a \mapsto \frac{a}{1}$ l'omomorfismo naturale. Mostrare che:

   (a) Se $P \subseteq Q$, allora $Ker(\phi_Q) \subseteq Ker(\phi_P)$;

   (b) $Ker(\phi_P)$ è contenuto in ogni ideale P-primario. In particolare $Ker(\phi_P) \subseteq P$;

   (c) $\sqrt{Ker(\phi_P)} = P$ se e soltanto se P è un primo minimale di A.