

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018  
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa  
Prof. S. Gabelli  
Esercizi 1 - Moduli e sottomoduli

Nel seguito  $A$  è un anello commutativo unitario non nullo;  $M$  è un  $A$ -modulo;  $\{N_\alpha\}$  è una famiglia di sottomoduli di  $M$ ;  $\{I_\alpha\}$  è una famiglia di ideali di  $A$ ;  $N, L, H \in \{N_\alpha\}$  e  $I, J \in \{I_\alpha\}$ .

1. Sia  $G$  un gruppo abeliano additivo. Verificare che l'insieme  $End(G)$  degli endomorfismi di  $G$  è un anello (generalmente non commutativo) con le operazioni

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(x) &= \varphi(x) + \psi(x) & (\text{addizione puntuale}) \\ (\varphi\psi)(x) &= \varphi(\psi(x)) & (\text{composizione di funzioni}).\end{aligned}$$

Mostrare inoltre che l'applicazione

$$End(G) \times G \longrightarrow G, \quad (\varphi, x) \rightarrow \varphi(x)$$

definisce su  $G$  una struttura di  $End(G)$ -modulo sinistro.

2. Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$ . Mostrare che, se  $\varphi$  è un fissato  $K$ -endomorfismo di  $V$ , allora  $V$  assume una struttura di  $K[X]$ -modulo con la moltiplicazione scalare definita da:

$$K[X] \times V \longrightarrow V; \quad \left(\sum a_i X^i, v\right) \rightarrow \sum a_i \varphi^i(v).$$

Viceversa, ogni modulo  $V$  su  $K[X]$  è in particolare uno spazio vettoriale su  $K$ , inoltre la moltiplicazione per  $X$ ,

$$\mu_X : V \longrightarrow V; \quad v \rightarrow Xv$$

è un  $K$ -endomorfismo di  $V$ .

In questo modo, si ha una biiezione tra l'insieme delle coppie  $(V, \varphi)$ , dove  $V$  è un  $K$ -spazio vettoriale e  $\varphi$  è un  $K$ -endomorfismo di  $V$ , e l'insieme dei  $K[X]$ -moduli.

3. Verificare che  $I \subseteq \text{Ann}(\frac{M}{IM})$  e quindi  $\frac{M}{IM}$  ha una struttura di  $\frac{A}{I}$  modulo, con la moltiplicazione scalare definita da

$$(a + I)(m + IM) = (am + IM).$$

In particolare, se  $I$  è un ideale massimale di  $A$ , allora  $\frac{M}{IM}$  è uno spazio vettoriale su  $\frac{A}{I}$ .

4. Sia  $G$  un gruppo abeliano additivo e  $n \geq 2$ . Mostrare che se  $ng = 0$  per ogni  $g \in G$ , allora  $G$  è un modulo su  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ .
5. Sia  $A$  un dominio intero. Un elemento  $m \in M$  si dice di *torsione* se esiste  $a \in A, a \neq 0$  tale che  $am = 0$ . Mostrare che l'insieme  $T$  degli elementi di torsione di  $M$  è un sottomodulo di  $M$ .

$M$  si dice un *modulo di torsione* se  $M = T$ , si dice *privo di torsione* se  $T = 0$ . Mostrare che  $\frac{M}{T}$  è privo di torsione.

6. Mostrare che ogni gruppo abeliano finito è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo di torsione.
7. Un  $A$ -modulo  $M$  si dice *fedele* se  $\text{Ann}_A(M) = 0$ .  
Verificare che se  $I = \text{Ann}_A(M)$  allora  $M$  è un  $\frac{A}{I}$ -modulo fedele.
8. Verificare che  $I = \text{Ann}_A(\frac{A}{I}) = (0 :_A A + I)$ .
9. Verificare che  $(N :_A L) = \text{Ann}(\frac{(N+L)}{N})$ .
10. Per ogni  $a \in A$ , definiamo l'applicazione

$$\mu_a : M \longrightarrow M ; \quad m \rightarrow am.$$

Verificare che  $\mu_a$  è un endomorfismo ( $A$ -lineare) di  $M$  e che l'applicazione

$$A \longrightarrow \text{End}(M) ; \quad a \rightarrow \mu_a$$

è un omomorfismo di anelli. Mostrare inoltre che tale omomorfismo è iniettivo se e soltanto se  $M$  è fedele.

11. Sia  $K$  un campo. Mostrare che  $A$  è una  $K$ -algebra se e soltanto se  $K \subseteq A$ .
12. Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

(a) *Proprietà Distributiva*:  $I(N + L) = IN + IL$ ;

(b) *Legge Modulare*: Se  $L \subseteq N$ , allora  $N \cap (L + H) = L + (N \cap H)$ .

Mostrare poi con un esempio che in generale, anche per gli ideali di  $A$ , risulta  $N \cap (L + H) \neq (N \cap L) + (N \cap H)$ .

13. Verificare che  $\cap_{\alpha} N_{\alpha}$  e  $\sum_{\alpha} N_{\alpha} = \{n_{\alpha_1} + \cdots + n_{\alpha_s} ; n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}\}$  sono sottomoduli di  $M$ .

Verificare inoltre che:

(a)  $(\cap_{\alpha} N_{\alpha} : L) = \cap_{\alpha} (N_{\alpha} : L)$ ;

(b)  $(L : \sum_{\alpha} N_{\alpha}) = \cap_{\alpha} (L : N_{\alpha})$ .

14. Verificare che  $(N :_M I) := \{x \in M ; xI \subseteq N\}$  è un sottomodulo di  $M$  contenente  $N$ . Inoltre valgono le seguenti proprietà:

(a)  $((N :_M I) :_M J) = (N :_M IJ) = ((N :_M J) :_M I)$ ;

(b)  $(\cap_{\alpha} N_{\alpha} :_M I) = \cap_{\alpha} (N_{\alpha} :_M I)$ ;

(c)  $(N :_M \sum_{\alpha} I_{\alpha}) = \cap_{\alpha} (N :_M I_{\alpha})$ .