Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa - Prof. S. Gabelli
Esercizi 9

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo e I è un ideale di A.

1. *Teorema Cinese dei Resti.* Siano $I_1, \ldots, I_n$ ideali di A e considerare l'applicazione

$$\varphi : A \longrightarrow \frac{A}{I_1} \times \cdots \times \frac{A}{I_n} \quad a \to (a + I_1, \ldots, a + I_n).$$

Mostrare che:

(a) φ è un omomorfismo di anelli.

(b) φ è suriettivo se e soltanto se se gli ideali $I_1, \ldots, I_n$ sono a coppie coprimi.

(c) $Ker(\varphi) = I_1 \cap \cdots \cap I_n$.

Quindi, se $I_1, \ldots, I_n$ sono a coppie coprimi, si ha un isomorfismo

$$\frac{A}{I_1 \ldots I_n} \longrightarrow \frac{A}{I_1} \times \cdots \times \frac{A}{I_n} \quad a + I \to (a + I_1, \ldots, a + I_n).$$

2. Siano K un campo, $A = K[X, Y]$ e $I = (XY)$. Verificare che $I = (X) \cap (Y)$ e l'omomorfismo

$$\varphi : \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{(X)} \times \frac{A}{(Y)} \quad a + I \to (a + (X), a + (Y)).$$

è ben posto e non suriettivo.

3. Siano $I_1, \ldots, I_n$ ideali di A tali che $I_1 \cap \cdots \cap I_n = (0)$. Mostrare che, se A/I_i è noetheriano per ogni i, allora A è noetheriano.

Suggerimento: Usare l'Esercizio 1.

4. Mostrare che se A è un dominio Noetheriano, allora ogni elemento di A è prodotto di un un numero finito di elementi irriducibili.

5. Mostrare che l'anello quoziente A/I è un A-modulo noetheriano se e soltanto se è un anello noetheriano.

6. Mostrare che se A/I è noetheriano, per ogni ideale non nullo I di A, allora A è noetheriano.

7. Sia $M = x_1A + \cdots + x_nA$ un A-modulo finitamente generato. Mostrare che:

   (a) $Ann_A M$ è isomorfo a $(0 :_A x_1A) \cap \cdots \cap (0 :_A x_nA)$.

   (b) L'applicazione

   $$\frac{A}{Ann_a M} \longrightarrow x_1A \oplus \cdots \oplus x_nA\,; \quad a + Ann_A M \mapsto (x_1a, \ldots, x_na)$$

   è ben posta ed è un omomorfismo iniettivo di moduli.

   Dedurne che:

   (c) Se M è un A-modulo noetheriano, allora $\dfrac{A}{Ann_a M}$ è un anello noetheriano.

   (d) Se esiste un A-modulo noetheriano fedele, allora A è un anello noetheriano.

8. Mostrare che, se A è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un suo sottocampo k, allora A è un anello noetheriano.

9. Siano $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo, $n \geq 0$. Verificare che:

   (a) $G_n := \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}\} = (\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z})\mathbb{Z}$ è il sottogruppo additivo di $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ formato dalle classi il cui ordine divide p^n.

   (b) $G_n \subsetneq G_{n+1}$.

   (c) $G(p^\infty) := \cup_{n \geq 0} G_n$ è il sottogruppo additivo di $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ formato dalle classi che hanno ordine una potenza di p.

   (d) Se H è un sottogruppo di $G(p^\infty)$, allora $H = G_n$ per qualche $n \geq 0$.

   (e) $G(p^\infty)$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo artiniano ma non noetheriano.

10. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo e sia $G := \{\frac{m}{p^t}; m \in \mathbb{Z}, t \geq 0\} \subseteq \mathbb{Q}$.

    Verificare che:

    (a) G è un sottogruppo additivo di $\mathbb{Q}$ contenente $\mathbb{Z}$.

(b) $\frac{G}{\mathbb{Z}} = G(p^\infty)$

(c) G non è noetheriano né artiniano.

11. Dimostrare le seguenti proprietà degli ideali primi:

(a) Se P è un ideale primo e $\cap_1^n I_j \subseteq P$, allora $I_j \subseteq P$ per qualche $j = 1, \ldots, n$. In particolare, se $\cap_1^n I_j = P$, allora $I_j = P$.

(b) *Prime avoidance* Se gli ideali P_j sono primi e $I \subseteq \cup_1^n P_j$, allora $I \subseteq P_j$ per qualche $j = 1, \ldots, n$.

Suggerimento per (b). Per contrapposizione e per induzione su n.

Per $n = 1$ il teorema è banalmente vero.

Supponiamo che $I \nsubseteq P_j$ per ogni j. Per l'ipotesi induttiva, $I \nsubseteq \cup_{j \neq i} P_j$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. Sia $x_i \in I \setminus \cup_{j \neq i} P_j$. Se, per qualche i, $x_i \notin P_i$, allora $x_i \notin \cup_1^n P_j$. Se $x_i \in P_i$ per ogni i, allora, posto $y = \sum(\prod_{i \neq j} x_i)$, verificare che $y \in I \setminus \cup_1^n P_j$.

NB. La proprietà (b) vale anche se al più due degli ideali P_i non sono primi.