Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 11 - Dipendenza integrale

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo.

1. Sia $A \subseteq B$ un'estensione di anelli. Mostrare che B è un A-modulo finitamente generato se e soltanto se B è una A-algebra finitamente generata ed è intera su A.

2. Sia d un intero privo di fattori quadratici. Se $a := x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, poniamo $\bar{a} = x - y\sqrt{d}$.

   Mostrare che a è intero su $\mathbb{Z}$ se e soltanto se $a + \bar{a}$, $a\bar{a} \in \mathbb{Z}$.

3. Sia d un intero privo di fattori quadratici e sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Mostrare che la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K è $\mathbb{Z}[\omega_d]$, dove $\omega_d = \sqrt{d}$ se $d \equiv 2, 3 \mod 4$ e $\omega_d = (1 + \sqrt{d})/2$ se $d \equiv 1 \mod 4$.

   Suggerimento. Usare l'esercizio 2.

4. Sia A un dominio con campo dei quozienti K. Mostrare che per ogni $x \in K$ algebrico su A esiste $a \in A$ tale che ax sia intero su A.

5. Mostrare che un dominio con il massimo comune divisore è integralmente chiuso.

   Suggerimento. Notare che ogni elemento del campo dei quozienti si può scrivere come a/b con $MCD(a, b) = 1$.

6. Sia $A \subseteq B$ un'estensione di anelli e sia $S \subseteq A$ una parte moltiplicativa. Mostrare che, se C è la chiusura intera di A in B, allora la chiusura intera di A_S in B_S è C_S.

   Dedurne che se A è integralmente chiuso in B, allora A_S è integralmente chiuso in B_S.

7. Sia A un dominio e $M \in Max(A)$. Mostrare che

$$\overline{A_M} = \cap\{\overline{A}_N \,;\ N \in Max(\overline{A})\,,\ N \cap A = M\}.$$

8. Siano $A := \mathbb{R}[X^2+1]$, $B := \mathbb{R}[X]$, $Q := (X^2+1)B$ e $P = Q \cap A$. Mostrare che:

   (a) $\bar{A}_B = B$;

   (b) $\dfrac{1}{X+1} \in B_Q \setminus \overline{A_P}$.

   (Confrontare con l'Esercizio 6)

9. Sia $A := \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2+4)} = \mathbb{Z}[x]$, dove x denota la classe di X in A.

   Mostrare che A è un dominio integro, con campo dei quozienti $\mathbb{Q}[x]$. Inoltre $t = 2/x$ è intero su A, ma $t \notin A$.

   Dedurne che un anello quoziente di un dominio integralmente chiuso non è necessariamente integralmente chiuso.

10. Sia $A = \dfrac{k[X,Y]}{(Y^2 - X^3)} = k[x,y]$, dove x e y denotano rispettivamente la classe di X e Y in A.

    Mostrare che A è un dominio integro con campo dei quozienti $k(x,y)$. Inoltre $t := y/x$ è intero su A, ma $t \notin A$. Mostrare infine che $\bar{A} = k[t]$.

11. Sia B un anello tale che $A \subseteq B$ e sia $f(X) \in B[X]$. Mostrare che, se tutti i coefficienti di $f(X)$ sono interi su A, allora $f(X)$ è intero su $A[X]$.

12. Sia A un dominio di integrità. Mostrare che se $A[X]$ è integralmente chiuso, anche A è integralmente chiuso.

13. Mostrare che $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ e $F[X_1, \ldots, X_n]$, dove F è un campo, sono integralmente chiusi.