Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 12 - Valutazioni

Un gruppo abeliano $(G, *)$ è un *gruppo (totalmente) ordinato* se in esso è definita una relazione $\leq$ di ordine (totale) compatibile con l'operazione, cioè tale che:

$$x \leq x'\,,\; y \leq y' \Rightarrow x * y \leq x' * y'.$$

Se G è un gruppo additivo ordinato e α è un simbolo, possiamo estendere l'operazione di G e la sua relazione di ordine all'insieme $G \cup \{\alpha\}$ ponendo, per ogni $x \in G$:

$$x < \alpha\,;\; x * \alpha = \alpha * x = \alpha.$$

In notazione additiva, si usa porre $\alpha = \infty$, mentre in notazione moltiplicativa si usa $\alpha = 0$.

1. Mostrare che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è un gruppo totalmente ordinato rispetto all'ordine lexicografico.

Se A è un dominio con campo dei quozienti K, il gruppo moltiplicativo quoziente $\Delta = \dfrac{K^*}{U(A)}$ si dice il *gruppo di divisibilità* di A.

2. Mostrare che il gruppo di divisibilità di un dominio A è un gruppo ordinato rispetto alla relazione

$$xU(A) \leq yU(A) \iff xy^{-1} \in A.$$

3. Mostrare che V è un dominio di valutazione se e soltanto se il suo gruppo di divisibilità è un gruppo totalmente ordinato.

Se K è un campo e G è un gruppo additivo ordinato, una applicazione suriettiva $v : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ si dice una *valutazione su* K se

$$v(x) = \infty \text{ se e soltanto se } x = 0;$$
$$v(xy) = v(x) + v(y), \text{ per ogni } x, y \in K;$$
$$v(x + y) \geq min\{v(x), v(y)\}.$$

In notazione moltiplicativa, $v : K \longrightarrow G \cup \{0\}$ è una valutazione se:

$$v(x) = 0 \text{ se e soltanto se } x = 0;$$
$$v(xy) = v(x)v(y), \text{ per ogni } x, y \in K;$$
$$v(x + y) \leq max\{v(x), v(y)\}.$$

4. Sia v una valutazione su un campo K, in notazione additiva. Mostrare che l'insieme $A_v := \{x \in K\,; v(x) \geq 0\}$ è un anello di valutazione con ideale massimale $M_v := \{x \in K\,; v(x) > 0\}$.

(In notazione moltiplicativa, $A_v := \{x \in K\,; v(x) \leq 1\}$ e $M_v := \{x \in K\,; v(x) < 1\}$.)

5. Sia (V, M) un anello di valutazione con campo dei quozienti K e gruppo di divisibilità Δ.

Mostrare che l'applicazione $v : V \longrightarrow \Delta \cup \{0\}$ definita da

$$v(0) = 0 \text{ e } v(x) = xU(V) \text{ per } x \in K^*$$

è una valutazione su K, in notazione moltiplicativa, il cui anello di valutazione A_v coincide con V.

6. Sia K un campo e $v : K(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ l'applicazione definita da

$$v(0) = \infty \text{ e } v(f/g) = deg(g) - deg(f) \text{ per } f \neq 0.$$

Mostrare che v è una valutazione discreta, il cui anello associato è $K[X^{-1}]_{(X^{-1})}$.

7. Sia K un campo e $a \in K$. Per ogni $f(X) \in K[X] \setminus \{0\}$, indichiamo con $\mu_a(f)$ la molteplicità di a come radice di $f(X)$, $\mu_a(f) = 0$ se e soltanto se $f(a) \neq 0$.

Sia $v_a : K(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ l'applicazione definita da

$$v_a(0) = \infty,\ v_a(f/g) = \mu_a(f) - \mu_a(g) \text{ se } f \neq 0.$$

Mostrare che v_a è una valutazione discreta, il cui anello di valutazione V_a è l'anello delle funzioni razionali *definite in* a, ovvero

$$V_a = \{f/g \in K(X)\,;\ g(a) \neq 0\} = K[X]_{(X-a)}.$$

8. Sia K un campo. Mostrare che l'anello delle serie formali $K[[X]]$ è un dominio di valutazione discreta.

9. Sia A un dominio a ideali principali. Mostrare che ogni localizzazione di A in un ideale primo non nullo è un dominio di valutazione discreta.

10. Sia K un campo e siano v_X, v_Y rispettivamente le valutazioni X-adica e Y-adica su $K(X, Y)$ (ricordare che $K[X, Y]$ è un UFD).

Mostrare che l'applicazione $v : K(X, Y) \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definita da $v(f/g) = (v_X(f/g), v_Y(f/g))$ è una valutazione su $K(X, Y)$.