Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa - Prof. S. Gabelli
Esercizi 13

1. Mostrare che, se $\sqrt{I}$ è finitamente generato, allora $I \supseteq (\sqrt{I})^n$, per un opportuno $n \geq 1$.

   Dedurne che, se Q è un ideale P-primario di un anello noetheriano, allora $Q \supseteq P^{(n)} := P^n A_P \cap A$, per un opportuno $n \geq 1$.

2. Dimostrare che il nilradicale di un anello noetheriano è nilpotente.

3. Sia A un anello noetheriano locale, con ideale massimale M. Dimostrare che $M^n \neq M^{n+1}$, per ogni $n \geq 1$ se e soltanto se M non è un primo minimale di A, ovvero in A esiste un primo P diverso da M.

   Dedurne che, se A è noetheriano e P non è minimale, allora $P^{(n)} \supsetneq P^{(n+1)}$, per ogni $n \geq 1$.

4. Mostrare che l'ideale $\langle X^2, Y + aX \rangle \subseteq k[X, Y]$ è $\langle X, Y \rangle$-primario, per ogni $a \in k$.

5. Sia K un campo e $A = K[X, Y, Z]/(X^2 - YZ)$. Determinare una decomposizione primaria dell'ideale principale generato dalla classe di X.

6. Sia $I := \langle X^2, XY, XZ, ZY \rangle \subseteq k[X, Y, Z]$. Mostrare che una decomposizione primaria ridotta dell'ideale I è
$$I = \langle X, Y \rangle \cap \langle X, Z \rangle \cap \langle X, Y, Z \rangle^2.$$

7. Sia A un anello noetheriano di dimensione ≤ 1. Mostrare che ogni ideale proprio di A è prodotto di ideali primari.

8. Sia A un dominio di dimensione uno con il carattere di finitezza. Mostrare che ogni ideale proprio di A ha una decomposizione primaria.

9. Dimostrare che se A è un dominio a ideali principali, ogni ideale proprio di A ammette una *unica* decomposizione primaria.

10. Dimostrare che il prodotto diretto di un numero finito di campi è un anello artiniano.