Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2017/2018
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 2 - Omomorfismi di moduli

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo.

1. Siano M, M' A-moduli e sia N un sottomodulo di M. Mostrare che:

   (a) L'applicazione
   $$\pi : M \longrightarrow \frac{M}{N}\,; \quad x \to x + N$$
   è un omomorfismo di A-moduli e il suo nucleo è N.

   (b) Se $\varphi : M \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A-moduli e $N \subseteq Ker(\varphi)$, allora l'applicazione
   $$\overline{\varphi} : \frac{M}{N} \longrightarrow M'\,; \quad x + N \to \varphi(x)$$
   è ben definita ed è un omomorfismo di A-moduli.
   Inoltre $\varphi = \overline{\varphi}\pi$ e se $\psi : \dfrac{M}{N} \longrightarrow M'$ è un omomorfismo di A-moduli tale che $\varphi = \psi\pi$, allora $\psi = \overline{\varphi}$.

2. Siano H, M, N A-moduli. Dimostrare i seguenti *Teoremi di Isomorfismo*:

   (a) *Primo Teorema di Omomorfismo*: Se $\varphi : M \longrightarrow N$ è un omomorfismo di A-moduli, allora l'applicazione
   $$\overline{\varphi} : \frac{M}{Ker(\varphi)} \longrightarrow Im(\varphi)\,; \quad x + Ker(\varphi) \to \varphi(x)$$
   è ben definita ed è un isomorfismo di A-moduli.

   (b) *Secondo Teorema di Omomorfismo*: L'applicazione
   $$\frac{M}{M \cap N} \longrightarrow \frac{M+N}{N}\,; \quad x + (M \cap N) \to x + N$$
   è un isomorfismo di A-moduli.

(c) *Terzo Teorema di Omomorfismo o Teorema del Doppio Quoziente*:
Se $H \subseteq N \subseteq M$, allora l'applicazione

$$\frac{M/H}{N/H} \longrightarrow \frac{M}{N}\,; \quad (x+H)+N/H \to x+N$$

è un isomorfismo di A-moduli.

3. Sia $\varphi : M \longrightarrow M'$ un omomorfismo di moduli. Mostrare che l'applicazione $N \longrightarrow \varphi(N)$, definita sull'insieme dei sottomoduli di M, induce una corrispondenza biunivoca tra i sottomoduli di $Im(\varphi)$ e i sottomoduli di M contenenti $Ker(\varphi)$.

4. Verificare che l'applicazione $Hom_A(A, M) \longrightarrow M$ definita da $\alpha \to \alpha(1)$ è un isomorfismo di A-moduli.

5. Sia $\varphi : N \longrightarrow N'$ un omomorfismo di A-moduli. Mostrare che le applicazioni

$$Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(M, N')\,; \quad \alpha \to \varphi\alpha$$

$$Hom_A(N', M) \longrightarrow Hom_A(N, M)\,; \quad \alpha \to \alpha\varphi$$

sono omomorfismi di A-moduli.

6. Per ogni A-modulo H, indichiamo con $H^* := Hom_A(H, A)$ il *modulo duale* di H. Mostrare con un esempio che H^* può essere il modulo nullo anche se H non lo è.

7. Mostrare che l'applicazione

$$Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(N^*, M^*)\,; \quad \varphi \to \varphi^*,$$

dove

$$\varphi^* : N^* \longrightarrow M^*\,; \quad \alpha \to \alpha\varphi,$$

è un omomorfismo di A-moduli.

Ideali frazionari di un dominio

Se A è un *dominio* con campo dei quozienti K, un *ideale frazionario* di A è un sotto A-modulo I di K tale che $(A :_A I) \neq (0)$.

(a) Mostrare che:

i. I è un ideale frazionario se e soltanto se $I = \dfrac{1}{d}J$, dove $J \subseteq A$ è un ideale e $d \in A \setminus \{0\}$;

ii. Se I è un sotto A-modulo di K finitamente generato, allora I è un ideale frazionario;

iii. Ogni sotto A-modulo di un ideale frazionario è un ideale frazionario.

(b) Siano I, J ideali frazionari di A. Mostrare che:

$$IJ\,; \quad I \cap J\,; \quad I + J\,; \quad (I :_K J) = \{x \in K\,;\, xJ \subseteq I\}$$

sono ideali frazionari.

(c) Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A, allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A.

Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.

(d) Sia I un ideale frazionario di A. Mostrare che l'applicazione

$$\varphi :\ (A :_K I) \longrightarrow Hom_A(I, A)\,; \quad x \mapsto \varphi(x),$$

dove

$$\varphi(x) :\ I \longrightarrow A\,; \quad y \mapsto xy,$$

è un isomorfismo di A-moduli.

Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I)$ si chiama anche il *duale* di I.