Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 4 – I funtori Hom

Sia F un funtore nella categoria degli A-moduli.

F si dice *covariante* se trasforma un morfismo $f : N \longrightarrow N'$ in un morfismo $F(f) : F(N) \longrightarrow F(N')$.

Il funtore $F = Hom_A(M, -)$ è covariante: Se $f : N \longrightarrow N'$, allora

$$F(f) = \overline{f} : Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(M, N'); \quad \alpha \mapsto f\alpha.$$

Il funtore $T(-) : M \otimes -$ è covariante: Se $f : N \longrightarrow N'$, allora

$$T(f) = id_M \otimes f : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N'; \quad m \otimes n \mapsto m \otimes f(n).$$

F si dice *controvariante* se trasforma un morfismo $f : N \longrightarrow N'$ in un morfismo $F(f) : F(N') \longrightarrow F(N)$.

Il funtore $G = Hom_A(-, M)$ è controvariante: Se $f : N \longrightarrow N'$, allora

$$G(f) = \overline{f} : Hom_A(N', M) \longrightarrow Hom_A(N, M); \quad \alpha \mapsto \alpha f.$$

Un funtore covariante F si dice *esatto a destra* se, data una qualsiasi successione esatta

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \longrightarrow 0$$

la successione

$$F(N_1) \xrightarrow{F(f)} F(N_2) \xrightarrow{F(g)} F(N_3) \longrightarrow 0$$

è ancora esatta. Si dice *esatto a sinistra* se la successione

$$0 \longrightarrow F(N_1)) \xrightarrow{F(f)} F(N_2) \xrightarrow{F(g)} F(N_3)$$

è ancora esatta.

Un funtore controvariante G si dice *esatto a destra* se, data una qualsiasi successione esatta

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \longrightarrow 0$$

la successione

$$G(N_3) \xrightarrow{G(g)} G(N_2) \xrightarrow{G(f)} G(N_1) \longrightarrow 0$$

è ancora esatta. Si dice *esatto a sinistra* se la successione

$$0 \longrightarrow F(N_3) \xrightarrow{G(g)} F(N_2) \xrightarrow{G(f)} F(N_1)$$

è ancora esatta.

1. Verificare che il funtore covariante $Hom_A(M, -)$ è esatto a sinistra. Più precisamente, la successione di A-moduli,

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$$

   è esatta se e soltanto se la successione

$$0 \longrightarrow Hom_A(M, N_1) \longrightarrow Hom_A(M, N_2) \longrightarrow Hom_A(M, N_3)$$

   è esatta, per ogni A-modulo M.

   Suggerimento: Per mostrare che l'esattezza in $Hom_A(M, N_2)$ implica l'esattezza in N_2, scegliere $M = A$.

2. Mostrare che il funtore covariante $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, -)$ non è esatto a destra.

3. Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti per un A-modulo P. Un modulo che soddisfa queste condizioni si chiama *proiettivo*:

   (a) Il funtore $Hom_A(P, -)$ è esatto (a destra);

   (b) Ogni successione esatta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

   si spezza;

   (c) Dato un morfismo $f : P \longrightarrow H$ ed un morfismo suriettivo $g : M \longrightarrow H$, esiste un morfismo $h : P \longrightarrow M$ tale che $f = gh$.

4. Mostrare che ogni modulo libero proiettivo.

5. Sia $A = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ con p, q due numeri primi distinti. Mostrare che $\mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{Z}_q$ sono A-moduli e non sono liberi, mentre ovviamente A lo è. Quindi $\mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{Z}_q$ sono A-moduli proiettivi che non sono liberi.

6. Verificare che il funtore controvariante $Hom_A(-, M)$ è esatto a sinistra. Più precisamente, la successione di A-moduli,

$$N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$$

è esatta se e soltanto se la successione

$$0 \longrightarrow Hom_A(N_3, M) \longrightarrow Hom_A(N_2, M) \longrightarrow Hom_A(N_1, M)$$

è esatta, per ogni A-modulo M.

Suggerimento: Per mostrare che l'esattezza in $Hom_A(N_2, M)$ implica l'esattezza in N_2, scegliere $M = N_2/Imf$.

7. Mostrare che il funtore controvariante $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ non è esatto a destra.

8. Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti per un A-modulo E. Un modulo che soddisfa queste condizioni si chiama *iniettivo*:

   (a) Il funtore $Hom_A(-, E)$ è esatto (a destra);

   (b) Ogni successione esatta

   $$0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

   si spezza;

   (c) Dato un morfismo $g : H \longrightarrow E$ ed un morfismo iniettivo $f : H \longrightarrow M$, esiste un morfismo $h : M \longrightarrow E$ tale che $g = hf$.