Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 5 - Prodotto tensoriale

Nel seguito, se non specificato altrimenti, consideriamo moduli su un fissato anello commutativo unitario A.

1. Verificare che le seguenti applicazioni sono isomorfismi di moduli:

   (a) $A \otimes M \longrightarrow M\,; \quad a \otimes m \mapsto am;$

   (b) $M \otimes N \longrightarrow N \otimes M\,; \quad m \otimes n \mapsto n \otimes m;$

   (c) $(M \otimes N) \otimes L \longrightarrow N \otimes (M \otimes L)\,; \quad (m \otimes n) \otimes l \mapsto n \otimes (m \otimes l);$

   (d) $(M \oplus N) \otimes L \longrightarrow (M \otimes L) \oplus (N \otimes L)\,; \quad (m \oplus n) \otimes l \mapsto (m \otimes l) \oplus (n \otimes l).$

   Suggerimento: Usare la proprietà universale del prodotto tensoriale per verificare che le applicazioni sono ben definite.

2. Siano $M' \subseteq M$, $N' \subseteq N$ sottomoduli e sia $\Gamma \subseteq M \otimes N$ il sottomodulo generato dagli elementi $x \otimes y$ con $x \in M'$ oppure $y \in N'$. Mostrare che l'applicazione

   $$\frac{M}{M'} \otimes \frac{N}{N'} \longrightarrow \frac{(M \otimes N)}{\Gamma}\,; \quad (m + M') \otimes (n + N') \mapsto (m \otimes n) + \Gamma,$$

   è un isomorfismo di moduli.

   Suggerimento: Verificare che l'applicazione:

   $$\frac{M}{M'} \times \frac{N}{N'} \longrightarrow \frac{(M \otimes N)}{\Gamma}\,; \quad (m + M', n + N') \mapsto (m \otimes n) + \Gamma$$

   è ben definita e bilineare.

   Nota: $M' \otimes N'$ non è sempre un sottomodulo di $M \otimes N$. Ad esempio, $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \neq (0)$ ($2 \otimes 1 \neq 0$ in $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$), ma l'applicazione

   $$2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 (\cong \mathbb{Z}_2),\ x \otimes y \mapsto x \otimes y$$

   è l'applicazione nulla ($2x \otimes 1 = x \otimes 2 = 0$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$).

3. Usando l'esercizio precedente, mostrare che:

$$\frac{A}{I} \otimes_A \frac{A}{J} \cong \frac{A}{I+J}; \quad M \otimes_A \frac{A}{J} \cong \frac{M}{JM}.$$

4. Siano L_1, L_2 moduli liberi di rango finito rispettivamente uguale a r_1, r_2. Mostrare che $L_1 \otimes L_2$ è libero di rango $r_1 r_2$.

5. Siano B una A-algebra, M un A-modulo e

$$\epsilon : M \longrightarrow B \otimes_A M\,; \quad m \mapsto 1 \otimes m$$

l'applicazione canonica. Mostrare che:

   (a) L'applicazione

   $$B \times (B \otimes_A M) \longrightarrow B \otimes_A M\,; (b', b \otimes m) \mapsto b'b \otimes m,$$

   definisce su $B \otimes_A M$ una struttura di B-modulo.

   (b) Se M è generato da $\{m_\lambda\}$ su A, $B \otimes_A M$ è generato da $\{1 \otimes m_\lambda\}$ su B.

   (c) Se N è un B-modulo, per ogni applicazione A-lineare $f : M \longrightarrow N$ esiste una unica applicazione B-lineare $g : M \otimes_A B \longrightarrow N$ tale che $f = g\epsilon$ (ovvero $f(m) = g(1 \otimes m)$).

   Suggerimento: Considerare l'applicazione A-bilineare

   $$B \times M \longrightarrow N\,; \quad (b, m) \mapsto bf(m).$$

6. Sia $A \subseteq B$ un'estensione di anelli e M un A-modulo libero, con base $\{m_\lambda\}$. Dimostrare che:

   (a) L'applicazione canonica $\epsilon : M \longrightarrow B \otimes_A M$ è iniettiva.

   (b) $B \otimes_A M$ è un B-modulo libero, con base $\{1 \otimes m_\lambda\}$.

7. Sia B una A-algebra. Mostrare che

$$A[X] \otimes_A B \cong B[X]\,; \quad A[X] \otimes_A A[Y] \cong A[X, Y].$$

8. Siano A e B due anelli. N si chiama un (A, B)-*modulo* se è contemporaneamente un A-modulo ed un B-modulo e le due strutture sono compatibili, cioè $(am)b = a(mb)$, per ogni $a \in A$, $b \in B$, $m \in M$. Ad esempio se N è un B-modulo e B è una A-algebra, allora N è un (A, B)-modulo.

   Mostrare che, se M è un A-modulo e L è un B-modulo, allora $M \otimes_A N$ è un B-modulo, $N \otimes_B L$ è un A-modulo e

$$(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong M \otimes_A (N \otimes_B L).$$