Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli

6. Aggiunzione ed esattezza del prodotto tensoriale

Nel seguito, se non specificato altrimenti, consideriamo moduli su un fissato anello commutativo unitario A.

Le definizioni e le proprietà di esattezza dei funtori Hom sono state aggiunte nel foglio degli Esercizi 4.

1. (Esercizio 4-2) Ricordiamo che la successione

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

è esatta se e soltanto se la successione

$$0 \longrightarrow Hom_A(M'', H) \xrightarrow{\overline{g}} Hom_A(M, H) \xrightarrow{\overline{f}} Hom_A(M', H)$$

è esatta per ogni modulo H. (Dove $\overline{f}(\alpha) = \alpha f$, $\overline{g}(\beta) = \beta g$).

2. *I funtori $F = - \otimes N$ e $G = Hom_A(N, -)$ sono aggiunti, cioè si ha un isomorfismo funtoriale $Hom_A(F(M), L) \cong Hom_A(M, G(L))$.*

(a) Siano M, N, L moduli. Per ogni applicazione bilineare $f : M \times N \longrightarrow L$ e $m \in M$, indichiamo con $f(m, -) : N \longrightarrow L$ l'applicazione lineare definita da $n \mapsto f(m, n)$ e poniamo

$$\varphi(f) : M \longrightarrow Hom_A(N, L)\,; \quad m \mapsto f(m, -).$$

Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : Hom_A(M \otimes N, L) \longrightarrow Hom_A(M, Hom_A(N, L))\,; \quad f \mapsto \varphi(f)$$

è un ben definito isomorfismo lineare, con inverso definito da

$$\psi : Hom_A(M, Hom_A(N, L)) \longrightarrow Hom_A(M \otimes N, L)\,; \quad f \mapsto \psi(f),$$

dove

$$\psi(f) : M \otimes N \longrightarrow L\,; \quad m \otimes n \mapsto f(m)(n).$$

(b) Se $f : M_1 \longrightarrow M_2$ è un fissato omomorfismo di moduli e P un qualsiasi modulo, consideriamo gli omomorfismi definiti da

$$\overline{f} : Hom_A(M_2, P) \longrightarrow Hom_A(M_1, P)\,; \quad \alpha \mapsto \alpha f$$

$$f \otimes id_P : M_1 \otimes P \longrightarrow M_2 \otimes P\,; \quad m_1 \otimes p \mapsto f(m_1) \otimes p.$$

Dati poi due moduli N e L, sia

$$\varphi_i : Hom_A(M_i \otimes N, L) \longrightarrow Hom_A(M_i, Hom_A(N, L)),$$

$i = 1, 2$, l'omomorfismo definito come nel punto (a). Verificare che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(M_2 \otimes N, L) & \xrightarrow{\overline{f \otimes id_N}} & Hom_A(M_1 \otimes N, L) \\ \varphi_2 \Big\downarrow & & \varphi_1 \Big\downarrow \\ Hom_A(M_2, Hom_A(N, L)) & \xrightarrow{\overline{f}} & Hom_A(M_1, Hom_A(N, L)) \end{array}$$

è commutativo, .

3. *Esattezza a destra del prodotto tensoriale* $- \otimes N$.

Data la successione esatta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

Per il punto 1, con $H = Hom_A(N, L)$, si ottiene che la successione

$$0 \longrightarrow Hom_A(M'', H) \xrightarrow{\overline{g}} Hom_A(M, H) \xrightarrow{\overline{f}} Hom_A(M', H)$$

è esatta, comunque scelti N, L.

Per il punto 2, la successione

$$0 \longrightarrow Hom_A(M'' \otimes N, L) \xrightarrow{\overline{g \otimes id_N}} Hom_A(M \otimes N, L) \xrightarrow{\overline{f \otimes id_N}} Hom_A(M' \otimes N, L)$$

è esatta, comunque scelti N, L.

Ancora per il punto 1, la successione

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes id_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes id_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

è esatta per ogni N.

4. *Dimostrazione diretta*:

   Se la successione
   $$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
   è esatta, allora la successione
   $$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes id_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes id_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$
   è esatta per ogni N.

   (a) Verificare che la suriettività di g implica la suriettività di $g \otimes id_N$.

   (b) Verificare che $I := Im(f \otimes id_N) \subseteq Ker(g \otimes id_N) := K$.

   (c) Per (a) si ha un isomorfismo
   $$\alpha : \frac{M \otimes N}{K} \longrightarrow M'' \otimes N; \quad (m \otimes n) + K \mapsto g(m) \otimes n.$$
   e quindi per (b)
   $$g \otimes id_N : \ M \otimes N \longrightarrow \frac{M \otimes N}{I} \xrightarrow{\pi} \frac{M \otimes N}{K} \xrightarrow{\alpha} M'' \otimes N$$
   dove
   $$m \otimes n \mapsto (m \otimes n) + I \mapsto (m \otimes n) + K \mapsto g(m) \otimes n.$$

   (d) Dimostrare che l'applicazione lineare $\alpha\pi$ è un isomorfismo, con inverso
   $$\beta : M'' \otimes N \longrightarrow \frac{M \otimes N}{I}; \quad g(m) \otimes n \mapsto (m \otimes n) + I$$
   NB. Verificare che β è ben definita:
   $$g(m_1) = g(m_2) \Rightarrow (m_1 \otimes n) + I = (m_2 \otimes n) + I.$$

   (e) Dedurre da (d) che $I := Im(f \otimes id_N) = Ker(g \otimes id_N) := K$.

5. Mostrare che Il funtore $- \otimes \mathbb{Z}_n$ non è esatto a sinistra.

   Un modulo P si dice *piatto* se il funtore $- \otimes P$ è esatto (a sinistra).