Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 7

Tutti gli anelli considerati sono commutativi unitari non nulli e tutti gli omomorfismi di anelli sono unitari.

1. Sia $A = k[X_1, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate $X_1, \dots, X_n$ a coefficienti in un campo k. Dimostrare che l'ideale M formato da tutti i polinomi in A con termine costante nullo è massimale.

2. Sia M un ideale massimale di un anello A. Dimostrare che, se ogni elemento di $1 + M = \{1 + x; x \in M\}$ è invertibile in A, allora A è locale.

3. Sia P un ideale primo di un anello A e siano $I_1, \dots, I_n$ ideali qualsiasi di A. Dimostrare che, se $P \supseteq I_1 \cap \dots \cap I_n$ allora esiste j, $1 \leq j \leq n$, tale che $P \supseteq I_j$.

4. Siano P, Q ideali primi di A. Dimostrare che $P \cap Q$ è un ideale primo se e soltanto se $P \subseteq Q$ oppure $Q \subseteq P$.

5. Sia $\{P_\lambda\}$ una catena discendente di ideali primi di A. Dimostrare che $\cap P_\lambda$ è un ideale primo di A.

Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo unitario.

Se I è un ideale di A, indichiamo con I^e l'*estensione* di I in B, ovvero l'ideale di B generato da $f(I)$:

$$I^e = f(I)B = \{\sum_{i=1}^{n} f(a_i)b_i; a_i \in I, b_i \in B, n \geq 1\}.$$

Se J è un ideale di B, indichiamo poi con I^c l'ideale *contrazione* di J su A, ovvero la controimmagine di J:

$$I^c = f^{-1}(J).$$

1. Siano I_1, I_2 ideali di A e J_1, J_2 ideali di B. Verificare che:

(a) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$; $(J_1 + J_2)^c \supseteq J_1^c + J_2^c$;

(b) $(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e$; $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$;

(c) $(I_1 I_2)^e = I_1^e {I_2}^e$; $(J_1 J_2)^c \supseteq J_1^c J_2^c$;

(d) $(I_1 :_A I_2)^e \subseteq (I_1^e :_B I_2^e)$; $(J_1 :_B J_2)^c \subseteq (J_1^c :_A J_2^c)$;

2. Supponiamo che f sia suriettivo. Mostrare che:

   (a) $I^e = f(I)$; dunque $f(I)$ è un ideale di B.

   (b) Se $I \supseteq Ker(f)$, allora l'applicazione:

   $$\frac{A}{I} \longrightarrow \frac{B}{f(I)} \quad \text{definita da} \quad a + I \to f(a) + f(I)$$

   è ben posta ed è un isomorfismo.

   (c) Se J è un ideale di B, allora l'applicazione:

   $$\frac{A}{J^c} \longrightarrow \frac{B}{J} \quad \text{definita da} \quad a + J^c \to f(a) + J$$

   è ben posta ed è un isomorfismo.

3. Mostrare che se $Q \subseteq B$ è un ideale primo, allora Q^c è un ideale primo.

4. Sia $I \subseteq A$ un ideale. Dimostrare che

   (a) L'estensione di I in $A[X]$ è l'ideale $I[X]$ formato dai polinomi a coefficienti in I.

   (b) $I[X]^c = I[X] \cap A = I$.

   (c) Se $I = P$ è un ideale primo, anche $P[X]$ è primo.

   (d) Mostrare con un esempio che se $I = M$ è massimale in A, $M[X]$ puó non esere un ideale massimale di $A[X]$.

5. Sia A un dominio con campo dei quozienti K. Mostrare che ogni ideale primo di $K[X]$ si contrae sull'ideale nullo di A