Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 8 - Anelli di frazioni e radicale

Nel seguito A denota un anello commutativo unitario e S una sua parte moltiplicativa.

Se $s \in A$ è un elemento non nilpotente e $S = \{s^n, n \geq 0\}$, si scrive $A_S = A_s$.

1. Sia X un sottoinsieme di A tale che $1 \in X$ e sia
$$S := S(X) := \{s_1 \dots s_k\,; s_i \in X\,, k \geq 1\}.$$
Mostrare che S è una parte moltiplicativa di A (che si dice la parte moltiplicativa *generata* da X).
Mostrare inoltre che se X è finito e non contiene zerodivisori, allora $A_S = A_s$ per un opportuno $s \in S$.

2. Mostrare che l'omomorfismo naturale
$$A \longrightarrow A_S\,; \quad a \mapsto \frac{a}{1}$$
è un isomorfismo se e soltanto se $S \subseteq \mathcal{U}(A)$.

3. Sia A un dominio e sia $S = A \setminus \{0\}$. Mostrare che $(A[X])_S = K[X]$, dove K è il campo dei quozienti di A.

4. Sia K un campo. Mostrare che il campo dei quozienti dell'anello delle serie formali $K[[X]]$ è l'anello delle *serie di Laurent*
$$K((X)) := \{\sum_{i \geq s} a_i X^i; a_i \in K, s \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Mostrare che $A_s = A[\frac{1}{s}]$ e che A_s è isomorfo a $\frac{A[X]}{(sX-1)}$.
Suggerimento: Considerare l'applicazione
$$A[X] \longrightarrow A_s\,; \quad f(X) \mapsto f(\frac{1}{s}).$$

6. Sia $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Determinare la saturazione $\overline{S}$ della parte moltiplicativa $S = \{s^n\}_{n \geq 0}$ e verificare che $\mathbb{Z}_s = \mathbb{Z}_{\overline{S}}$.

7. Sia I un ideale di A. Mostrare che $S = 1 + I = \{1 + a\,;\, a \in I\}$ è una parte moltiplicativa di A e determinare la saturazione di S.

8. Sia $S = 1 + (X) \subseteq A[X]$. Mostrare che l'applicazione

$$A[X]_S \longrightarrow A[[X]]\,; \quad \frac{f(X)}{g(X)} \to f(X)g(X)^{-1}$$

è un (ben definito) omomorfismo iniettivo di anelli.

9. Sia K un campo e sia $S = \{X^n\}_{n \geq 1}$ la parte moltiplicativa di $K[X]$ generata da X. Verificare che gli anelli $K[X]_S$ e $K[X, X^{-1}]$ sono isomorfi.

10. Sia $\phi : A \longrightarrow A_S$, $a \to \dfrac{a}{1}$ l'omomorfismo naturale e sia T una parte moltiplicativa di A. Mostrare che $ST = \{st, s \in S, t \in T\}$ è una parte moltiplicativa di A e che

$$A_{ST} \simeq (A_S)_{\phi(T)}.$$

Dedurne che, se $P \subseteq Q$ sono due ideali primi di A, allora $A_P = (A_Q)_{PA_Q}$.

11. Sia I un ideale di A e sia $T = \{s + I\,;\, s \in S\} \subseteq \dfrac{A}{I}$. Mostrare che T è una parte moltiplicativa di $\dfrac{A}{I}$ e che

$$(\frac{A}{I})_T \simeq \frac{A_S}{I_S}.$$

Dedurne che, se P è un ideale primo, il campo residuo dell'anello locale A_P è isomorfo al campo dei quozienti del dominio $\dfrac{A}{P}$.

12. Siano M, N moduli su A. Mostrare che l'applicazione

$$M_S \otimes_{A_S} N_S \longrightarrow (M \otimes N)_S\,; \quad \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \mapsto \frac{m \otimes n}{st}$$

è un isomorfismo A_S-lineare.

Suggerimento: Notare che A_S è un (A, A_S)-modulo ed usare l'Esercizio 5-8.

13. Ricordare che $\sqrt{I} = \{a \in A\,;\ \text{esiste } n \geq 0 \text{ tale che } a^n \in I\}$ è il *radicale* di I.

    Verificare le seguenti proprietà:

    (a) $\sqrt{I} = A$ se e soltanto se $I = A$;

    (b) Se $I \subseteq J$, allora $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$;

    (c) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;

    (d) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \supseteq \sqrt{I}\sqrt{J}$;

    (e) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$;

    (f) Se $J^n \subseteq I \subseteq J$ per qualche $n \geq 1$, allora $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

14. Mostrare che $I + J = A$ se e soltanto se $\sqrt{I} + \sqrt{J} = A$. Dedurne che, se $I + J = A$ allora $I^n + J^m = A$, comunque scelti $n, m \geq 1$.

15. Supponiamo che A sia un dominio a ideali principali e sia $a \in A \backslash \mathcal{U}(\mathcal{A})$. Mostrare che, se $a = {p_1}^{e_1} \cdots {p_n}^{e_n}$, $n \geq 1$, è la fattorizzazione di a in elementi primi, allora $\sqrt{(a)} = (p_1 \cdots p_n)$.

    Dedurne che l'anello quoziente $\frac{A}{(a)}$ è ridotto se e soltanto se a non è diviso da alcun quadrato.