

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2017/2018
AL410 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Prof. S. Gabelli
Esercizi 9

1. Sia A un dominio di integrità con campo dei quozienti K e sia B un sopra anello di A (cioè $A \subseteq B \subseteq K$). Mostrare che se $P \in \text{Spec}(B)$ allora $A_{P \cap A} \subseteq B_P$.
2. Siano $P := 3\mathbb{Z}$ e $Q := 5\mathbb{Z}$.
 - (1) Mostrare che $S := \mathbb{Z} \setminus (P \cup Q)$ è una parte moltiplicativa di $\mathbb{Z}$;
 - (2) Descrivere gli elementi di $\mathbb{Z}_S$;
 - (3) Esprimere $\mathbb{Z}_S$ come intersezione di localizzazioni in ideali primi.
3. Mostrare che l'ideale $\langle X^2, Y + aX \rangle \subseteq k[X, Y]$ è $\langle X, Y \rangle$ -primario, per ogni $a \in k$.
4. Sia $S \subseteq A$ una parte moltiplicativa priva di zerodivisori. Mostrare che l'applicazione

$$A[X]_S \longrightarrow A_S[X]; \quad \frac{\sum a_i X^i}{s} \mapsto \sum \frac{a_i}{s} X^i$$

è un isomorfismo.

5. Sia P un ideale primo di A . L'ideale $P^{(n)} := P^n A_P \cap A$ si dice l' n -sima *potenza simbolica* di P . Mostrare che $P^{(n)}$ è un ideale P -primario.
6. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo e si consideri l'ideale $M := (p, X)$ di $\mathbb{Z}[X]$. Mostrare che M è un ideale massimale e che l'ideale $I := (p^2, X)$ è M -primario.
7. Sia P un ideale primo di A e sia $\phi_P : A \longrightarrow A_P, a \mapsto \frac{a}{1}$ l'omomorfismo naturale. Mostrare che:
 - (a) Se $P \subseteq Q$, allora $\text{Ker}(\phi_Q) \subseteq \text{Ker}(\phi_P)$;
 - (b) $\text{Ker}(\phi_P)$ è contenuto in ogni ideale P -primario. In particolare $\text{Ker}(\phi_P) \subseteq P$;
 - (c) $\sqrt{\text{Ker}(\phi_P)} = P$ se e soltanto se P è un primo minimale di A .