Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2004/2005

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 5

1. Sia A un dominio con campo dei quozienti K. Mostrare che:
   (a) I è un ideale frazionario se e soltanto se $I = \frac{1}{d}J$, dove $J \subseteq A$ è un ideale e $d \in A \setminus \{0\}$;
   (b) Se I è un sotto A-modulo di K finitamente generato, allora I è un ideale frazionario;
   (c) Ogni sotto A-modulo di un ideale frazionario è un ideale frazionario.

2. Siano I, J ideali frazionari di A. Mostrare che: IJ, $I \cap J$, $I + J$ e $(I :_K J) = \{x \in K \,;\, xJ \subseteq I\}$ sono ideali frazionari.

3. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A, allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.

4. Sia I un ideale frazionario di A. Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : \, (A :_K I) \longrightarrow Hom_A(I, A) \,; \; (\varphi(x))(y) = xy$$

   è un isomorfismo di A-moduli.

   Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I)$ si dice anche il *duale* di I.

5. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ e sia $I \neq (0)$ un ideale di $\mathcal{O}_K$ tale che $I \nsubseteq xO_K$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 2$. Mostrare che

   (1) $I \cap \mathbb{Z} = N(I)\mathbb{Z}$.

   (2) I è primo se e soltanto se $N(I) = p$ è un numero primo.

6. Stabilire se i seguenti numeri primi p sono inerti, ramificati o decomposti nell'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ e fattorizzare l'ideale $p\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

   $p = 2, 3, 7\,;\ d = 7 \quad p = 2\,;\ d = 47 \quad p = 23\,;\ d = 37 \quad p = 11\,;\ d = -163.$

7. Se $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ e $p \in \mathbb{Z}$ è un numero primo, denotiamo con $\overline{f}(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ il polinomio ottenuto riducendo i coefficienti di $f(X)$ modulo p. (Provare a) dimostrare il seguente

   Teorema di Dedekind (1878):

   Sia $K = \mathbb{Q}(\theta)$ di grado n su $\mathbb{Q}$ e supponiamo che $\{1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}\}$ sia una base intera di $\mathcal{O}_K$. Sia $m(X) \in \mathbb{Z}[X]$ il polinomio minimo di θ su $\mathbb{Q}$ e sia

   $$\overline{m}(X) = \overline{q_1}(X)^{e_1}\overline{q_2}(X)^{e_2}\ldots\overline{q_s}(X)^{e_s}$$

   la fattorizzazione di $\overline{m}(X)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{Z}_p$. Allora, per $i = 1, \ldots, s$,

   (1) $P_i = (p, q_i(\theta)) \subseteq \mathcal{O}_K$ è un ideale primo;

   (2) $P_i \neq P_j$ per $i \neq j$;

   (2) $N(P_i) = p^{\deg(q_i(X))}$;

   (3) $p\mathcal{O}_K = P_1^{e_1}P_2^{e_2}\ldots P_s^{e_s}$.

   Suggerimento: Verificare il teorema per alcuni esempi noti nel caso quadratico $n = 2$ e cercare una dimostrazione (vedi anche l'Esercizio 1.5). Poi generalizzare.