Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2006/2007

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 1

1. Stabilire quali tra i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ sono simmetrici ed esprimerli in funzione dei polinomi simmetrici elementari:
   $(X+Y)(Y+Z)(X+Z)$; $\quad X^2+Y^2+Z^2$;
   $X^2Y+Y^2Z+Z^2X$; $\quad X^2Y+X^2Z+XY^2+XZ^2+Y^2Z+YZ^2$.
2. Calcolare il discriminante del polinomio X^n-1.
3. Mostrare che, se r, s sono due interi positivi e $m = mcm(r, s)$, allora
   $$\mathbb{Q}(\xi_r, \xi_s) = \mathbb{Q}(\xi_m).$$
4. Siano p, q primi distinti. Verificare che vale la Formula di Möbius-Dedekind:
   $$\Phi_{pq}(X) = \frac{\Phi_p(X^q)}{\Phi_p(X)}.$$
5. Determinare esplicitamente $\Phi_{15}(X)$ e calcolare il suo discriminante.
6. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\theta := \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ ed i coniugati di θ.
7. Sia K un campo numerico di grado n e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.
   Mostrare che $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$ se e soltanto se $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.
8. Sia $K := \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un ampliamento quadratico. Calcolare il discriminante di K rispetto alle basi $\{1, \alpha\}$ e $\{1, \sqrt{d}\}$.
9. Siano $\alpha := \sqrt{2}$, $\beta := \sqrt{3}$, $\theta := \alpha + \beta$. Determinare il discriminante di $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ rispetto alle basi: $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, $\quad \{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$.
10. Sia $\theta := \sqrt[3]{2}$. Determinare il discriminante di $\mathbb{Q}(\theta)$ rispetto alle basi: $\{1, \theta, \theta^2\}$, $\quad \{\theta, \theta^2+\theta, \theta^3+1\}$.