Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2010/2011

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 2

1. Determinare un elemento primitivo per i seguenti ampliamenti di $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2})$.

2. Sia θ una radice del polinomio $X^5 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dell'elemento θ^2.

3. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\theta := \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ ed i coniugati di θ.

4. Determinare i $\mathbb{Q}(\theta)$-coniugati di θ e α per $\theta := \sqrt[4]{3}$ e $\alpha := 1+\theta,\ \theta+\theta^2$.

5. Sia ξ una radice primitiva undicesima dell'unità. Determinare i $\mathbb{Q}(\xi)$-coniugati di $\alpha := \xi + \xi^{-1}$.

6. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}$ con polinomio minimo $m(X) := a_0 + a_1X + \cdots + X^n$. Mostrare che α è un autovalore, di autovettore $\mathbf{v} := (1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$, della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

7. Sia K un campo numerico, $\alpha \in K$ e $\varphi_\alpha : K \longrightarrow K$, $x \mapsto \alpha x$ la moltiplicazione per α. Mostrare che:

   (1) Il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ coincide con il polinomio caratteristico di φ_α;

   (2) Se A è la matrice di φ_α rispetto ad una qualsiasi base di $\mathbb{Q}(\alpha)$, allora
   $$T(\alpha) = a_{11} + \cdots + a_{nn}; \quad N(\alpha) = \det A.$$

8. Sia p un numero primo e sia $\xi \neq 1$ una radice p-esima dell'unità. Calcolare la norma di $\alpha := 1 - \xi$ rispetto a $\mathbb{Q}(\xi)$.