

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2010/2011
AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 3

Nel seguito A è un anello commutativo unitario non nullo; M è un A -modulo; $\{N_\alpha\}$ è una famiglia di sottomoduli di M ; $\{I_\alpha\}$ è una famiglia di ideali di A ; $N, L, H \in \{N_\alpha\}$ e $I, J \in \{I_\alpha\}$.

1. Verificare che $I \subseteq \text{Ann}(\frac{M}{IM})$ e quindi $\frac{M}{IM}$ ha una struttura di $\frac{A}{I}$ modulo, con la moltiplicazione scalare definita da

$$(a + I)(m + IM) = (am + IM).$$

In particolare, se I è un ideale massimale di A , allora $\frac{M}{IM}$ è uno spazio vettoriale su $\frac{A}{I}$.

2. Sia G un gruppo abeliano additivo e $n \geq 2$. Mostrare che se $ng = 0$ per ogni $g \in G$, allora G è un modulo su $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.
3. Sia A un dominio integro. Un elemento $m \in M$ si dice di *torsione* se esiste $a \in A, a \neq 0$ tale che $am = 0$. Mostrare che l'insieme T degli elementi di torsione di M è un sottomodulo di M .

M si dice un *modulo di torsione* se $M = T$, si dice *privo di torsione* se $T = 0$. Mostrare che $\frac{M}{T}$ è privo di torsione.

4. Mostrare che ogni gruppo abeliano finito è uno \mathbb{Z} -modulo di torsione.
5. Un A -modulo M si dice *fedele* se $\text{Ann}_A(M) = 0$.
Verificare che se $I = \text{Ann}_A(M)$ allora M è un $\frac{A}{I}$ -modulo fedele.
6. Verificare che $I = \text{Ann}_A(\frac{A}{I}) = (0 :_A A + I)$.
7. Verificare che $(N :_A L) = \text{Ann}(\frac{(N+L)}{N})$.
8. Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

(a) *Proprietà Distributiva*: $I(N + L) = IN + IL$;

(b) *Legge Modulare*: Se $L \subseteq N$, allora $N \cap (L + H) = L + (N \cap H)$.

Mostrare poi con un esempio che in generale, anche per gli ideali di A , risulta $N \cap (L + H) \neq (N \cap L) + (N \cap H)$.

9. Verificare che $\cap_{\alpha} N_{\alpha}$ e $\sum_{\alpha} N_{\alpha} = \{n_{\alpha_1} + \cdots + n_{\alpha_s}; n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}\}$ sono sottomoduli di M .

Verificare inoltre che:

(a) $(\cap_{\alpha} N_{\alpha} : L) = \cap_{\alpha} (N_{\alpha} : L)$;

(b) $(L : \sum_{\alpha} N_{\alpha}) = \cap_{\alpha} (L : N_{\alpha})$.

10. Verificare che $(N :_M I) := \{x \in M; xI \subseteq N\}$ è un sottomodulo di M contenente N . Inoltre valgono le seguenti proprietà:

(a) $(N :_M I) :_M J = (N :_M IJ) = (N :_M J) :_M I$;

(b) $(\cap_{\alpha} N_{\alpha} :_M I) = \cap_{\alpha} (N_{\alpha} :_M I)$;

(c) $(N :_M \sum_{\alpha} I_{\alpha}) = \cap_{\alpha} (N :_M I_{\alpha})$.

Ideali frazionari di un dominio

Se A è un *dominio* con campo dei quozienti K , un *ideale frazionario* di A è un sotto A -modulo I di K tale che $(A :_A I) \neq (0)$.

1. Mostrare che:

(a) I è un ideale frazionario se e soltanto se $I = \frac{1}{d}J$, dove $J \subseteq A$ è un ideale e $d \in A \setminus \{0\}$;

(b) Se I è un sotto A -modulo di K finitamente generato, allora I è un ideale frazionario;

(c) Ogni sotto A -modulo di un ideale frazionario è un ideale frazionario.

2. Siano I, J ideali frazionari di A . Mostrare che:

$$IJ; \quad I \cap J; \quad I + J; \quad (I :_K J) = \{x \in K; xJ \subseteq I\}$$

sono ideali frazionari.

3. Sia I un ideale frazionario di A . Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : (J :_K I) \longrightarrow \text{Hom}_A(I, J); \quad (\varphi(x))(y) = xy$$

è un isomorfismo di A -moduli.

Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I) \cong \text{Hom}_A(I, A)$ si chiama anche il *duale* di I .

4. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A , allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A , isomorfo all'anello degli endomorfismi di A .

Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.