Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2010/2011

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 4

1. Determinare il discriminante dell'ottavo e del quindicesimo ampliamento ciclotomico.

2. Determinare una base intera per $K := \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

3. Sia $I \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ideale generato da 4 e $2\sqrt{2}$. Mostrare che I è un ideale principale e determinare una base intera per I.

4. Sia $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base intera di $\mathcal{O}_K$ e sia $\gamma \in \mathcal{O}_K$, $\gamma \neq 0$. Mostrare che $\{\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n\}$ è una base intera per l'ideale I se e soltanto se $I = \gamma\mathcal{O}_K$.

5. Siano α, $\beta \in \mathcal{O}_K$ tali che $N(\alpha)$, $N(\beta) \in \mathbb{Z}$ siano relativamente primi. Mostrare che $\alpha\mathcal{O}_K + \beta\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

6. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$ e sia $I \neq (0)$ un ideale di $\mathcal{O}_K$. Mostrare che:

   (1) $I \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$, per un opportuno $n \geq 1$.

   (2) $I = n\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}$, per ogni $\gamma \in I \setminus n\mathbb{Z}$.