Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2010/2011
AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)
Esercizi 5

1. Sia $I \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ideale principale generato da $2\sqrt{2}$. Determinare una base di I come $\mathbb{Z}$-modulo e calcolare quanti elementi ha l'anello quoziente $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/I$.

2. Siano $A \subseteq B$ due anelli e sia I un ideale (risp. un ideale primo) di B. Mostrare che $I \cap A$ è un ideale (risp. un ideale primo) di A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $I \cap A$ può essere primo anche se I non lo è.

3. Determinare un elemento α in un anello di interi quadratici tale che $N(\alpha) = 31$, $Tr(\alpha) = 17$.

4. Esiste un anello di interi algebrici in cui un elemento di norma uguale a 12 è irriducibile?

5. Determinare due elementi di un campo di interi quadratici che hanno stessa norma ma che non sono né coniugati né associati.

6. Determinare tutti gli elementi associati a $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ e tutti gli elementi associati a $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

7. Sia α una radice del polinomio $X^3 + 3X + 7$ e sia $K := \mathbb{Q}(\alpha)$. Mostrare che α è un elemento irriducibile di $\mathcal{O}_K$.

8. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\omega_d]$ è un dominio euclideo per $d = -1, -2, 2, 3$ (*riguardare il caso* $d = -1$ *ed estendere*).

9. Dimostrare che:

   (1) Se $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un UFD, allora 2 non è un elemento primo.

   (2) Se $d \leq -3$, allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è un UFD.

   (3) Se $d \equiv 1 \mod 4$, allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è un UFD (*usare* (1)).

10. Fattorizzare n in elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\omega_d]$ per:

    $n = 26$, $d = -22$; $n = 30$, $d = -29$; $n = 6$, $d = -23$.