Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2010/2011

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 6

1. Effettuare la divisione euclidea di $13+18i$ per $5+3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

2. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I=(1+3i)$ e $J=(3-3i)$. Determinare gli ideali $I+J$, IJ e $I\cap J$.

3. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:
$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}\,.$$

4. Effettuare la divisione euclidea di $\alpha := \frac{7+11i\sqrt{3}}{2}$ per $\beta := 2+i\sqrt{3}$ in $\mathbb{Z}[\omega_{-3}]$.

5. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[\omega_{-19}]$:
$$35\,,\ 1+i\sqrt{19}\,,\ 2+i\sqrt{19}.$$

6. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\omega_2]$
$$14=(\sqrt{2})^2(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})(8+3\sqrt{2})$$
sono due fattorizzazioni di 14 in elementi primi e determinare quali sono i fattori associati.

7. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\omega_{-5}]$ gli elementi 6 e $2(1+i\sqrt{5})$ non hanno massimo comune divisore.

8. Mostrare che in un anello di interi quadratici un numero primo $p\in\mathbb{Z}$ può essere fattorizzato al più in due elementi primi.

9. Sia $\xi=\xi_5$.
(1) Verificare che $N(a+b\xi)=(a^5+b^5)/(a+b)$.
(2) Mostrare che $\xi+2$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[\xi_5]$.
(3) Fattorizzare 11 in elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\xi_5]$.

10. Sia $\xi = \xi_7$ e $\varphi : \mathbb{Q}(\xi) \longrightarrow \mathbb{Q}(\xi); \quad \xi \mapsto \xi^3$. Se $\alpha \in \mathbb{Z}[\xi]$, poniamo $\beta := \alpha\varphi^2(\alpha)\varphi^4(\alpha)$.

   (1) Verificare che $\varphi^2(\beta) = \beta$.

   (2) $\beta = a + b(\xi + \xi^2 + \xi^4)$ per opportuni $a, b \in \mathbb{Z}$.

   (3) $\xi + \xi^2 + \xi^4 = (1 + i\sqrt{7})/2$.

   (4) $\varphi(\beta) = \overline{\beta}$ e $N(\alpha) = \beta\overline{\beta}$.

   (5) Calcolare $N(\xi + 5\xi^6)$.