Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2010/2011

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 7

1. Determinare:

   $(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z})\,, \quad (\mathbb{Z}[i] : (1+i)\mathbb{Z}[i])\,, \quad (\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : 3\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]+(1+2\sqrt{-5})\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]).$

2. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ e sia $I \neq (0)$ un ideale di $\mathcal{O}_K$ tale che $I \nsubseteq xO_K$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 2$. Mostrare che

   (1) $I \cap \mathbb{Z} = N(I)\mathbb{Z}$.

   (2) I è primo se e soltanto se $N(I) = p$ è un numero primo.

3. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 14 in elementi irriducibili e l'ideale $14\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

4. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 10 in elementi irriducibili e l'ideale $10\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

5. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento $5 + \sqrt{3}$ in elementi irriducibili e l'ideale $(5 + \sqrt{3})\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

6. Stabilire se i seguenti numeri primi p sono inerti, ramificati o decomposti nell'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ e fattorizzare l'ideale $p\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

   $p = 2, 3, 7\,,\ d = 7\ ;\ p = 2\,,\ d = 47\ ;\ p = 23\,,\ d = 37\ ;\ p = 11\,,\ d = -163.$

7. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Mostrare che l'applicazione:

   $$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(p)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_p[X]}{(X^2+1)} \text{ definita da } (a+bi)+(p) \to (\bar{a}+\bar{b}X)+(X^2+1)$$

   è un isomorfismo di anelli.

   Dedurne che p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se il polinomio $X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$, ovvero la congruenza $X^2 + 1 \equiv 0 \mod p$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.