Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2010/2011

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 8

1. *Teorema di Dedekind* (1878):

   Sia $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$ con polinomio minimo $m(X) \in \mathbb{Z}[X]$, e sia $d = [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo che non divide d e
   $$\overline{m}(X) = \overline{q_1}(X)^{e_1}\overline{q_2}(X)^{e_2} \dots \overline{q_s}(X)^{e_s}$$
   la fattorizzazione di $\overline{m}(X)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_p$. Allora, per $i = 1, \dots, s$,

   (1) $P_i = (p, q_i(\theta)) \subseteq \mathcal{O}_K$ è un ideale primo;

   (2) $P_i \neq P_j$ per $i \neq j$;

   (2) $N(P_i) = p^{\deg(\overline{q_i}(X))}$;

   (3) $p\mathcal{O}_K = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_s^{e_s}$.

   Suggerimento: Procedere come per il caso $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ visto a lezione, osservando che $\mathcal{O}_K/P_i$ è isomorfo a $\mathbb{Z}[\theta]/(\mathbb{Z}[\theta] + q_i(\theta)\mathbb{Z}[\theta])$ via la moltiplicazione per dp.

2. Sia $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$ con polinomio minimo $m(X) \in \mathbb{Z}[X]$ e supponiamo che il discriminante D di $m(X)$ non abbia fattori quadratici.

   Dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ e che D è il discriminante del campo K.

3. Sia $m(X) = X^3 - 4X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ e sia θ una sua radice.

   (1) Verificare che $m(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Posto $K = \mathbb{Q}(\theta)$, dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

   (3) Fattorizzare gli ideali $p\mathcal{O}_K$ per $p = 2, 3, 5$.

4. Sia $\theta \in \mathbb{C}$ tale che $\theta^3 + \theta - 1 = 0$. Determinare l'anello degli interi algebrici di $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ed il discriminante di K.

5. Si ξ una radice primitiva quinta dell'unità. Fattorizzare l'ideale $p\mathbb{Z}[\xi]$ in ideali primi di $\mathbb{Z}[\xi]$ per $p \leq 13$ primo.