Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2010/2011

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 9

1. Sia $p(X) = X^3 - 3X^2 + 7X - 45 \in \mathbb{Z}[X]$ e sia α una sua radice.

   (1) Verificare che $p(X)$ è irriducibile $\mod 11$ e dedurne che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Dato per noto che il discriminante di $p(X)$ è $D = -2^6 \cdot 7 \cdot 97$, determinare una base intera per l'anello degli interi di $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

2. Mostrare che un campo di numeri di grado dispari non contiene alcuna radice n-sima dell'unità per $n \geq 2$.

3. Sia $p \geq 2$ primo. Mostrare che $\sin(\frac{k\pi}{p})/\sin(\frac{\pi}{p})$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[\xi_p]$.

4. Sia $K = \mathbb{Q}(\xi_8)$. Mostrare che non ci sono numeri primi inerti in $\mathcal{O}_K$.

5. Sia $p \geq 2$ primo. Calcolare la norma di $1 - \xi_p$ in $\mathbb{Q}(\xi_{p^k})$.

6. Sia $p \geq 2$ primo e $m = p^k n$ con $(p, n) = 1$, $k \geq 1$. Se $K = \mathbb{Q}(\xi_m)$, mostrare che $p\mathcal{O}_K = (P_1 \cdots P_g)^{\varphi(p^k)}$ e che $fg = \varphi(n)$, dove f è il grado di P_i.

7. Siano $K = \mathbb{Q}(\xi_m)$, $p \geq 3$ un numero primo e $P \subseteq \mathcal{O}_K$ un ideale primo che divide $p\mathcal{O}_K$.

   Mostrare che, se P è non ramificato, $\sigma_p : K \longrightarrow K$, $\xi_m \mapsto \xi_m^p$ è un automorfismo di K e $S(P) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K)\,;\ \sigma(P) = P\}$ è ciclico generato da σ_p.