AL420 Teoria Algebrica dei Numeri
A.A. 2010/2011

Prof. Stefania Gabelli

Numeri algebrici. Ampliamenti algebrici semplici di un campo numerico. Ampliamenti quadratici. Ampliamenti ciclotomici. Ampliamenti finitamente generati. Il Teorema dell'Elemento Primitivo. Elementi coniugati. Isomorfismi in C.

Richiami di Teoria dei Moduli: generatori, quozienti, omomorfismi, operazioni tra sottomoduli. Ideali frazionari. Moduli liberi finitamente generati: basi e rango. Omomorfismi tra moduli liberi. Cambiamento di base.

Gruppi abeliani liberi di rango finito. Ogni sottogruppo di un gruppo abeliano libero di rango finito è libero. Quozienti di un gruppo libero.

Interi algebrici. Definizioni equivalenti. L'anello degli interi di un campo quadratico. L'anello degli interi del p-esimo ampliamento ciclotomico. Norma e Traccia di un numero algebrico.

Il discriminante assoluto di un campo numerico. Formule per il calcolo del discriminante. Il discriminante di un ampliamento quadratico. Il discriminante del p-simo ampliamento ciclotomico.

Basi intere. Esistenza di basi intere. Un algoritmo per la ricerca di basi intere.

Ideali negli anelli di interi algebrici e loro basi intere: caso quadratico.

Gli anelli di interi algebrici sono noetheriani, integralmente chiusi, di dimensione uno.

Proprietà aritmetiche di un dominio. Domini euclidei, principali, di Bezout, a fattorizzazione unica, con massimo comune divisore. Il caso noetheriano di dimensione uno.

Condizioni equivalenti affinché un anello di interi quadratici sia principale o euclideo. Come effettuare la divisione euclidea (quando possibile).

Il gruppo delle unità di un anello di interi quadratici. Unità fondamentali. Enunciato del teorema delle unità di Dirichlet.

Esempi espliciti di domini principali e non principali nel caso quadratico e ciclotomico. Gli interi di Gauss.

Norma di un ideale: definizioni equivalenti e prime proprietà. La norma di un ideale primo. Esistono un numero finito di ideali con norma fissata. Ogni ideale è contenuto in un numero finito di ideali (primi).

In un anello di interi algebrici ogni ideale non nullo è invertibile ed ogni ideale proprio è prodotto di ideali primi univocamente determinati. La norma di ideali è una funzione moltiplicativa.

Ideali primi negli anelli di interi algebrici: grado e indice di ramificazione. Un metodo di calcolo. Esempi di primi inerti, ramificati e decomposti. La relazione $n = e_1 f_1 + \ldots + e_g f_g$. Caso degli ampliamenti di Galois.

Studio della ramificazione negli anelli di interi quadratici e ciclotomici. Cenni sulle congruenze quadratiche: il simbolo di Legendre.

Il gruppo delle classi. Finitezza del gruppo delle classi di un anello di interi algebrici. Calcolo di esempi.

Testi consigliati

[1] H. Pollard - H. G. Diamond, *The Theory of Algebraic Numbers*. Carus Math. Monographs, AMS, (1974).
[2] I. N. Stewart - D. O. Tall, *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*. A. K. Peters Ltd, (2002).
[3] S. Gabelli, *Il problema della fattorizzazione nei domini di Dedekind*.
appunti in rete: www.mat.uniroma3.it/users/gabelli/fattorizzazione.pdf, (2010).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	■ SI	☐ NO
	orale	■ SI	☐ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	☐ NO

L'esame consiste di una prova scritta finale e di una prova orale. Per gli studenti che sostengono l'esame nell'Appello A o B la prova orale può consistere nell'esposizione di un seminario.

Gli studenti che non hanno frequentato il corso debbono prenotarsi almeno 10 giorni prima dell'appello d'esame, contattando il docente nell'orario di ricevimento o per e-mail.