Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2011/2012

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 1 - Preliminari

1. Costruire esplicitamente i campi:

   $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}+2i)\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{5}+2i)\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{3}).$

2. Sia K un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$. Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dove $d \in \mathbb{Z}$ ed è privo di fattori quadratici.

3. Siano a, b due interi positivi. Mostrare che
$$\mathbb{Q}(\sqrt{a},\sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}),$$
   per ogni x, $y \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

4. Siano $m, n \geq 2$ due interi coprimi. Mostrare che
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2},\ \sqrt[m]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}\,\sqrt[m]{3}).$$

5. Mostrare che, per ogni $m, n \geq 2$,
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2},\ \sqrt[m]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2}),$$
   per un opportuno $r \geq 2$.

6. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$. Mostrare che
   (a) α è algebrico su F se e soltanto se α^n è algebrico su F .
   (b) Se α ha grado dispari su F, allora α^2 ha lo stesso grado di α.

7. Determinare un elemento primitivo per i seguenti ampliamenti di $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[4]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt[3]{2})$.

8. Determinare due basi diverse su $\mathbb{Q}$ dei seguenti campi:
   $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})\,,\ \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}})\,,\ \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt[3]{2}})\,,\ \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}).$

9. Mostrare che $\pi + \frac{1}{\pi}$ è algebrico su $\mathbb{Q}(\pi^2)$ e determinarne il grado.

10. Determinare l'inverso di $\sqrt{5}+1$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

11. Determinare l'inverso (razionalizzato) di $1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

12. Sia α una radice del polinomio $4X^4+5X+10$. Determinare l'inverso di $\alpha^3+\alpha+1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

13. Si scrivano i seguenti numeri complessi, i loro coniugati ed i loro inversi in *forma trigonometrica*, ovvero nella forma $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$, e $0 < \theta \leq 2\pi$:
$$5,\ -7,\ i,\ -3i,\ 1+i,\ -\sqrt{3}+i.$$
Determinare inoltre le loro radici terze e quarte e rappresentarle sul piano di Gauss.

14. Sia $\xi = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ una radice n-sima dell'unità. Se m è il minimo intero positivo tale che $\xi^m = 1$, si dice che ξ ha *ordine* m. Con questa terminologia, le radici *primitive* n-sime sono esattamente quelle di ordine n.

    Dimostrare che:

    (1) Se k divide n, ξ ha ordine $\frac{n}{k}$;

    (2) Se m è l'ordine di ξ, m divide n (*Suggerimento*: effettuare la divisione col resto di n per m);

    (3) Se $d := MCD(n,k)$, l'ordine di ξ è $\frac{n}{d}$;

    (4) ξ è una radice n-sima primitiva se e soltanto se $d := MCD(n,k) = 1$;

    (5) Se ξ è una radice n-sima primitiva, tutte e sole le radici n-sime di 1 sono
$$\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n = 1.$$

15. Determinare il gruppo delle radici n-sime dell'unità per
$$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12.$$
Stabilire inoltre qual è l'ordine di ogni radice.