

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2011/2012

**AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)**

**Esercizi 2 - Polinomio minimo e polinomio caratteristico**

1. Sia  $\theta$  una radice del polinomio  $X^5 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ . Determinare il polinomio minimo su  $\mathbb{Q}$  dell'elemento  $\theta^2$ .
2. Sia  $F := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  e  $K := F(\alpha)$ .
  - (1) Determinare un elemento primitivo di  $K$  su  $\mathbb{Q}$  per  $\alpha = \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}$ .
  - (2) Estendere in tutti i modi possibili l'automorfismo di  $F$  definito da  $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$  ad una immersione di  $K$  in  $\mathbb{C}$ , per i valori sopra indicati.
3. Determinare il polinomio minimo su  $\mathbb{Q}$  di  $\theta := \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$  ed i coniugati di  $\theta$ .
4. Determinare i  $\mathbb{Q}(\theta)$ -coniugati di  $\theta$  e  $\alpha$  per  $\theta := \sqrt[4]{3}$  e  $\alpha := 1 + \theta, \theta + \theta^2$ .
5. Sia  $\alpha \in \mathbb{C}$  algebrico su  $\mathbb{Q}$  con polinomio minimo  $m(X) := a_0 + a_1X + \dots + X^n$ . Mostrare che  $\alpha$  è un autovalore, di autovettore  $\mathbf{v} := (1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ , della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(vista a coefficienti in  $\mathbb{C}$ ).

6. Sia  $\theta$  una radice del polinomio  $p(X) := X^3 - 3X + 1$ .
  - (1) Verificare che  $p(X)$  è irriducibile su  $\mathbb{Q}$ .
  - (2) Determinare la traccia e la norma di  $\theta^2$  in  $\mathbb{Q}(\theta)$ .
7. Sia  $K$  un campo numerico.
  - (1) Mostrare che l'applicazione traccia  $K \rightarrow \mathbb{Q}; \alpha \mapsto Tr_K(\alpha)$  è suriettiva.

- (2) Mostrare che l'applicazione  $K \times K \longrightarrow \mathbb{Q}; \quad (\alpha, \beta) \mapsto \text{Tr}_K(\alpha\beta)$  è bilineare simmetrica e non degenera.
8. Sia  $\xi$  una radice primitiva undicesima dell'unità. Determinare i  $\mathbb{Q}(\xi)$ -coniugati di  $\alpha := \xi + \xi^{-1}$ .
9. Sia  $\xi$  una radice primitiva sesta dell'unità. Calcolare la traccia di  $\xi$  in  $\mathbb{Q}(\xi)$ .
10. Sia  $p$  un numero primo e sia  $\xi \neq 1$  una radice  $p$ -esima dell'unità. Calcolare la norma di  $\alpha := 1 - \xi$  in  $\mathbb{Q}(\xi)$ .

Nel seguito,  $K$  è un campo numerico e, se  $\gamma \in K$ , indichiamo con  $\mu_\gamma : K \longrightarrow K$  la moltiplicazione per  $\gamma$ .

11. Se  $K := \mathbb{Q}(i)$ , determinare le matrici di  $\mu_{-i}$  e  $\mu_{1+i}$  rispetto alle basi  $\{1, i\}$  e  $\{1, 1 + i\}$ .
12. Sia  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$ . Posto  $\alpha := \sqrt{3}$ ,  $\beta := \sqrt[3]{2}$  e  $\theta := \alpha + \beta$ ,
- (1) Verificare che una base di  $K$  su  $\mathbb{Q}$  è  $\mathcal{B} := \{1, \alpha, \beta, \beta^2, \alpha\beta, \alpha\beta^2\}$ .
  - (2) Quando  $\gamma = \alpha, \beta, \theta$ , determinare la matrice associata a  $\mu_\gamma$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  ed il suo polinomio caratteristico  $f_\gamma(X)$ . Confrontare inoltre  $f_\gamma(X)$  con il polinomio minimo di  $\gamma$  su  $\mathbb{Q}$ .
  - (3) Determinare la norma e la traccia di  $\gamma$  in  $K$  e in  $\mathbb{Q}(\gamma)$  per  $\gamma = \alpha, \beta, \beta^2, \theta$ .
13. Sia  $\alpha \in K$  e sia  $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{C}$  un'immersione di  $K$  in  $\mathbb{C}$ , con  $\beta := \varphi(\alpha)$ .
- (1) Mostrare che se  $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$  è una base di  $K$  su  $\mathbb{Q}$ ,  $\varphi\mathcal{B} := \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$  è una base di  $\varphi(K)$  su  $\mathbb{Q}$ .
  - (2) Data per nota la matrice di  $\mu_\alpha$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , determinare la matrice di  $\mu_\beta : \varphi(K) \longrightarrow \varphi(K)$  rispetto alla base  $\varphi\mathcal{B}$ .
  - (3) Supponiamo poi che  $\varphi(K) = K$ , cioè che  $\varphi$  sia un automorfismo di  $K$ . Determinare la matrice di  $\mu_\beta$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  e quella di  $\mu_\alpha$  rispetto alla base  $\varphi\mathcal{B}$ .