

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2011/2012
AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)
Esercizi 3 - Discriminante

1. Determinare un elemento α in un anello di interi quadratici tale che $N(\alpha) = 31$, $Tr(\alpha) = 17$.
2. Determinare due elementi di un campo di interi quadratici che hanno stessa norma ma che non sono coniugati.
3. Calcolare l'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ per $d = 3, -3, 6, 7, -11$.
4. Siano $\alpha := \sqrt{2}$, $\beta := \sqrt{3}$, $\theta := \alpha + \beta$ e $K := \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. Determinare il discriminante in K delle basi: $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$.
5. Sia $\theta := \sqrt[3]{2}$ e $K := \mathbb{Q}(\theta)$. Determinare il discriminante in K delle basi: $\{1, \theta, \theta^2\}$, $\{3, \theta, \theta^2 + \theta\}$.
6. Calcolare il decimo polinomio ciclotomico ed il suo discriminante.
7. Sia $\alpha \in K := \mathbb{Q}(\theta)$. Mostrare che il discriminante della n -pla $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ è uguale al discriminante del polinomio caratteristico di α .
8. Sia $K := \mathbb{Q}(\theta)$. Mostrare che il discriminante in K della n -pla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è non nullo se e soltanto se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ è una base di K .
9. Sia $K := \mathbb{Q}(\xi)$ l' n -simo ampliamento ciclotomico. Determinare il discriminante in K della base $\{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{\varphi(n)-1}\}$ per $n = 8, 11$.
10. Sia α una radice del polinomio $f(X) := X^3 - X - 1$.
 - (1) Calcolare la traccia di α^k per $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
 - (2) Calcolare il discriminante $\Delta(1, \alpha, \alpha^2)$ usando la formula $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(Tr(\alpha_i \alpha_j))$.