**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2010/2011**

**AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)**

**Esercizi 4 - Basi intere**

1. Dando per scontato che l'anello degli interi ciclotomici è $\mathbb{Z}[\xi]$, determinare il discriminante dell'ottavo e del quindicesimo ampliamento ciclotomico.

2. Determinare una base intera per $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

3. Siano $\theta := \sqrt[3]{175}$ ed $\eta := \sqrt[3]{245}$. Dando per noto che una base intera per $K := \mathbb{Q}(\theta)$ è $\{1, \theta, \eta\}$, mostrare che non esiste nessun elemento $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tale che $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ sia una base intera per $K$ (e dunque $\mathbb{Z}[\alpha] \subsetneq \mathcal{O}_K$, per ogni $\alpha \in \mathcal{O}_K$).

4. Sia $I \subseteq \mathcal{O}_K$ un ideale e $\gamma \neq 0$ un suo elemento. Data una base intera $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ di $K$, mostrare che $\{\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n\}$ è una base di $I$ come $\mathbb{Z}$-modulo se e soltanto se $I = \gamma\mathcal{O}_K$.

5. Sia $I \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ideale generato da 4 e $2\sqrt{2}$. Mostrare che $I$ è un ideale principale, determinare una base di $I$ come $\mathbb{Z}$-modulo e calcolare l'indice $[\mathcal{O}_K : I]$.

6. Sia $I \subseteq \mathcal{O}_K$ un ideale. Mostrare che se $\alpha \in I$ allora $N(\alpha) \in I$.

7. Siano $\alpha$, $\beta \in \mathcal{O}_K$ tali che $N(\alpha)$, $N(\beta)$ siano relativamente primi. Mostrare che $\alpha\mathcal{O}_K + \beta\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

8. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$ e sia $I \neq (0)$ un ideale di $\mathcal{O}_K$. Mostrare che:

   (1) $I \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$, per un opportuno $n \geq 1$.

   (2) Esistono un intero $m > 0$ minimale e un intero $a \in \mathbb{Z}$ tale che $a + m\omega_d \in I$ ed inoltre $I = n\mathbb{Z} \oplus (a + m\omega_d)\mathbb{Z}$. In particolare, $I$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 2.

   (3) Dare un esempio in cui $n\mathbb{Z} \oplus (a + m\omega_d)\mathbb{Z} \neq \mathcal{O}_K$, ma

   $n\mathcal{O}_K \oplus (a + m\omega_d)\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

9. Mostrare che $\mathcal{O}_K$ è il più grande sottoanello di $K$ che è uno $\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato.

10. Dimostrare le seguenti proposizioni, usate a lezione:

    (1) Un dominio $A$ con un numero finito di elementi è un campo. (*Suggerimento*: Mostrare che la moltiplicazione per un elemento non nullo è biiettiva su $A$).

    (2) Sia $A$ un dominio con campo dei quozienti $K$ e sia $B$ un anello con $A \subseteq B \subseteq K$. Se $B$ è un $A$-modulo finitamente generato (ovvero $B = \beta_1 A + \cdots + \beta_n A$, $\beta_i \in B$) e $x \in K$ è intero su $B$ (ovvero è radice di un polinomio monico a coefficienti in $B$), allora $B[x]$ è un $A$-modulo finitamente generato.