**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2010/2011**

**AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)**

**Esercizi 5 - Fattorizzazione**

1. Sia $\alpha$ una radice del polinomio $X^3 + 3X + 7$ e sia $K := \mathbb{Q}(\alpha)$. Mostrare che $\alpha$ è un elemento irriducibile di $\mathcal{O}_K$.

2. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\omega_d]$ è un dominio euclideo per $d = -1, -2, 2, 3$ (*riguardare il caso $d = -1$ ed estendere*).

3. Effettuare la divisione euclidea di $13 + 18i$ per $5 + 3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

4. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1 + 3i)$ e $J = (3 - 3i)$. Determinare gli ideali $I + J$ , $IJ$ e $I \cap J$ .

5. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:
$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}.$$

6. Effettuare la divisione euclidea di $\alpha := \frac{7+11i\sqrt{3}}{2}$ per $\beta := 2 + i\sqrt{3}$ in $\mathbb{Z}[\omega_{-3}]$.

7. Fattorizzare $n$ in elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\omega_d]$ per:
$n = 26$, $d = -22$; $n = 30$, $d = -29$; $n = 6$, $d = -23$.

8. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[\omega_{-19}]$:
$$35\,,\ 1 + i\sqrt{19}\,,\ 2 + i\sqrt{19}.$$

9. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\omega_{-5}]$ gli elementi 6 e $2(1 + i\sqrt{5})$ non hanno massimo comune divisore.

10. Esiste un anello di interi algebrici in cui un elemento di norma uguale a 12 è irriducibile?

11. Sia $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ una soluzione dell'*Equazione di Pell*:

$$X^2 - Y^2 d = 1, \quad d \geq 2.$$

(1) Mostrare che $(a,b)$ è una *soluzione positiva* (cioè $a > 0$ e $b > 0$) se e soltanto se $a + b\sqrt{d} > 1$.

(2) Mostrare che se $(a,b)$ è una soluzione positiva tale che $\alpha := a + b\sqrt{d}$ sia minimale ($\alpha$ si chiama la *soluzione fondamentale*), allora tutte e sole le soluzioni sono $(\pm 1, 0)$, $(\pm a_n, \pm b_n)$, $n \geq 1$, dove $\alpha^n := a_n + b_n\sqrt{d}$.

12. Sia $\epsilon := a + b\omega_d$ un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[\omega_d]$. Mostrare che

- Se $d \neq 5$, $\epsilon > 1$ se e soltanto se $a > 0$ e $b > 0$;
- Se $d = 5$, $\epsilon > 1$ se e soltanto se $\epsilon = \omega_5$ oppure $a > 0$ e $b > 0$.

13. Verificare che:

- la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell $X^2 - 2Y^2 = 1$ è $(3,2)$ e l'unità fondamentale di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ è $1 + \sqrt{2}$.
- la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell $X^2 - 3Y^2 = 1$ è $(2,1)$ e l'unità fondamentale di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ è $2 + \sqrt{3}$.

14. Determinare tutti gli elementi associati a $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ e tutti gli elementi associati a $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

15. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$$14 = (\sqrt{2})^2(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})(8+3\sqrt{2})$$

sono due fattorizzazioni di 14 in elementi primi e determinare quali sono i fattori associati.