Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2010/2011

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 8 - Gruppo delle Classi

1. Sia $p(X) := X^3 + X^2 + 5X - 16$.

   (1) Verificare che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Sapendo che il discriminante di $p(X)$ è $D = -3 \times 23 \times 127$, mostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

   (3) Fattorizzare in ideali primi l'ideale principale di $\mathcal{O}_K$ generato da $\theta - 4$.

2. Sia $K := \mathbb{Q}[i\sqrt{47}]$. Verificare che $\mathcal{C}l(\mathcal{O}_K)$ è ciclico di ordine 5 (completare nei dettagli l'esercizio fatto in classe).

3. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\omega_d]$ è a fattorizzazione unica per $d = -19, -43, -67, -163$.

4. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\omega_{-19}]$ non è euclideo.

5. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{23})$. Verificare che $\mathcal{C}l(\mathcal{O}_K) = 0$.

6. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{10})$. Verificare che il numero delle classi di $\mathcal{O}_K$ è 2.

7. Sia $p(X) := X^3 - X - 1$.

   (1) Verificare che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Posto $K = \mathbb{Q}(\theta)$, dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

   (3) Verificare che $\mathbb{Z}[\theta]$ è a fattorizzazione unica.