

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2012/2013
AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)
Esercizi 1 - Preliminari

1. Costruire esplicitamente i campi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3} + 2i), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5} + 2i), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}).$$

2. Sia K un ampliamento quadratico di \mathbb{Q} . Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dove $d \in \mathbb{Z}$ ed è privo di fattori quadratici.

3. Siano a, b due interi positivi. Mostrare che

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}),$$

per ogni $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

4. Siano $m, n \geq 2$ due interi coprimi. Mostrare che

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2} \sqrt[m]{3}).$$

5. Mostrare che, per ogni $m, n \geq 2$,

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2}),$$

per un opportuno $r \geq 2$.

6. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$. Mostrare che

(a) α è algebrico su F se e soltanto se α^n è algebrico su F .

(b) Se α ha grado dispari su F , allora α^2 ha lo stesso grado di α .

7. Determinare un elemento primitivo per i seguenti ampliamenti di \mathbb{Q} :
 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2})$.

8. Determinare due basi diverse su \mathbb{Q} dei seguenti campi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}).$$

9. Mostrare che $\pi + \frac{1}{\pi}$ è algebrico su $\mathbb{Q}(\pi^2)$ e determinarne il grado.
10. Determinare l'inverso di $\sqrt{5} + 1$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
11. Determinare l'inverso (razionalizzato) di $1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.
12. Sia α una radice del polinomio $4X^4 + 5X + 10$. Determinare l'inverso di $\alpha^3 + \alpha + 1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.
13. Si scrivano i seguenti numeri complessi, i loro coniugati ed i loro inversi in *forma trigonometrica*, ovvero nella forma $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$, e $0 < \theta \leq 2\pi$:

$$5, -7, i, -3i, 1 + i, -\sqrt{3} + i.$$

Determinare inoltre le loro radici terze e quarte e rappresentarle sul piano di Gauss.

14. Sia $\xi = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ una radice n -sima dell'unità. Se m è il minimo intero positivo tale che $\xi^m = 1$, si dice che ξ ha *ordine* m . Con questa terminologia, le radici *primitive* n -sime sono esattamente quelle di ordine n .

Dimostrare che:

- (1) Se k divide n , ξ ha ordine $\frac{n}{k}$;
- (2) Se m è l'ordine di ξ , m divide n (*Suggerimento*: effettuare la divisione col resto di n per m);
- (3) Se $d := \text{MCD}(n, k)$, l'ordine di ξ è $\frac{n}{d}$;
- (4) ξ è una radice n -sima primitiva se e soltanto se $d := \text{MCD}(n, k) = 1$;
- (5) Se ξ è una radice n -sima primitiva, tutte e sole le radici n -sime di 1 sono

$$\xi, \xi^2, \dots, \xi^n = 1.$$

15. Determinare il gruppo delle radici n -sime dell'unità per
 $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$.

Stabilire inoltre qual è l'ordine di ogni radice.