Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2012/2013

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 2 - Polinomio minimo e polinomio caratteristico

1. Sia θ una radice del polinomio $X^5 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dell'elemento θ^2.

2. Sia $F := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $K := F(\alpha)$. Determinare un elemento primitivo di K su $\mathbb{Q}$ per $\alpha = \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}$.

3. Determinare i $\mathbb{Q}(\theta)$-coniugati di θ e α per $\theta := \sqrt[4]{3}$ e $\alpha := 1+\theta,\ \theta+\theta^2$.

4. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}$ con polinomio minimo $m(X) := a_0 + a_1X + \cdots + X^n$. Mostrare che α è un autovalore, di autovettore $\mathbf{v} := (1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$, della matrice
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
(vista a coefficienti in $\mathbb{C}$).

5. Sia θ una radice del polinomio $p(X) := X^3 - 3X + 1$.

   (1) Verificare che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Determinare la traccia e la norma di θ^2 in $\mathbb{Q}(\theta)$.

6. Sia K un campo numerico.

   (1) Mostrare che l'applicazione traccia $K \longrightarrow \mathbb{Q}\,; \quad \alpha \mapsto Tr_K(\alpha)$ è suriettiva.

   (2) Mostrare che l'applicazione $K \times K \longrightarrow \mathbb{Q}\,; \quad (\alpha, \beta) \mapsto Tr_K(\alpha\beta)$ è bilineare simmetrica e non degenere.

7. Sia ξ una radice primitiva undicesima dell'unità. Determinare i $\mathbb{Q}(\xi)$-coniugati di $\alpha := \xi + \xi^{-1}$.

8. Sia ξ una radice primitiva sesta dell'unità. Calcolare la traccia di ξ in $\mathbb{Q}(\xi)$.

9. Sia p un numero primo e sia $\xi \neq 1$ una radice p-esima dell'unità. Calcolare la norma di $\alpha := 1 - \xi$ in $\mathbb{Q}(\xi)$.

   Nel seguito, K è un campo numerico e, se $\gamma \in K$, indichiamo con $\mu_\gamma : K \longrightarrow K$ la moltiplicazione per γ.

10. Se $K := \mathbb{Q}(i)$, determinare le matrici di μ_{-i} e μ_{1+i} rispetto alle basi $\{1, i\}$ e $\{1, 1+i\}$.

11. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$. Posto $\alpha := \sqrt{3}$, $\beta := \sqrt[3]{2}$ e $\theta := \alpha + \beta$,

    (1) Verificare che una base di K su $\mathbb{Q}$ è $\mathcal{B} := \{1, \alpha, \beta, \beta^2, \alpha\beta, \alpha\beta^2\}$.

    (2) Quando $\gamma = \alpha, \beta, \theta$, determinare la matrice associata a μ_γ rispetto alla base $\mathcal{B}$ ed il suo polinomio caratteristico $f_\gamma(X)$. Confrontare inoltre $f_\gamma(X)$ con il polinomio minimo di γ su $\mathbb{Q}$.

    (3) Determinare la norma e la traccia di γ in K e in $\mathbb{Q}(\gamma)$ per $\gamma = \alpha, \beta, \beta^2, \theta$.

12. Sia $\alpha \in K$ e sia $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ un'immersione di K in $\mathbb{C}$, con $\beta := \varphi(\alpha)$.

    (1) Mostrare che se $\mathcal{B} := \{e_i, \dots, e_n\}$ è una base di K su $\mathbb{Q}$, $\varphi\mathcal{B} := \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ è una base di $\varphi(K)$ su $\mathbb{Q}$.

    (2) Data per nota la matrice di μ_α rispetto alla base $\mathcal{B}$, determinare la matrice di $\mu_\beta : \varphi(K) \longrightarrow \varphi(K)$ rispetto alla base $\varphi\mathcal{B}$.

    (3) Supponiamo poi che $\varphi(K) = K$, cioè che φ sia un automorfismo di K. Determinare la matrice di μ_β rispetto alla base $\mathcal{B}$ e quella di μ_α rispetto alla base $\varphi\mathcal{B}$.