

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2011/2012**  
**AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)**  
**Esercizi 3 - Discriminante**

1. Determinare un elemento  $\alpha$  in un anello di interi quadratici tale che  $N(\alpha) = 31$ ,  $Tr(\alpha) = 17$ .
2. Determinare due elementi di un campo di interi quadratici che hanno stessa norma ma che non sono coniugati.
3. Calcolare l'anello degli interi di  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  per  $d = 3, -3, 6, 7, -11$ .
4. Siano  $\alpha := \sqrt{2}$ ,  $\beta := \sqrt{3}$ ,  $\theta := \alpha + \beta$  e  $K := \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ . Determinare il discriminante in  $K$  delle basi:  $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ ,  $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$ .
5. Sia  $\theta := \sqrt[3]{2}$  e  $K := \mathbb{Q}(\theta)$ . Determinare il discriminante in  $K$  delle basi:  $\{1, \theta, \theta^2\}$ ,  $\{3, \theta, \theta^2 + \theta\}$ .
6. Calcolare il decimo polinomio ciclotomico ed il suo discriminante.
7. Sia  $\alpha \in K := \mathbb{Q}(\theta)$ . Mostrare che il discriminante della  $n$ -pla  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  è uguale al discriminante del polinomio caratteristico di  $\alpha$ .
8. Sia  $K := \mathbb{Q}(\theta)$ . Mostrare che il discriminante in  $K$  della  $n$ -pla  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  è non nullo se e soltanto se  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  è una base di  $K$ .
9. Dando per scontato che l'anello degli interi ciclotomici è  $\mathbb{Z}[\xi]$ , determinare il discriminante dell'ottavo e del quindicesimo ampliamento ciclotomico.
10. Sia  $\alpha$  una radice del polinomio  $f(X) := X^3 + X + 1$ . Calcolare il discriminante  $\Delta(1, \alpha, \alpha^2)$ .