Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2012/2013

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 4 - Basi intere

1. Sia ξ una radice primitiva m-sima dell'unità, $m \geq 3$, e sia $\Delta = \Delta(1, \xi, \dots, \xi^{\varphi(m)-1})$.

   (1) Mostrare che Δ divide $m^{\varphi(m)}$;

   (2) Calcolare Δ quando m è una potenza di un numero primo.

   Suggerimento: procedere come visto a lezione per $m = p$ primo.

2. Determinare una base intera per $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

3. Siano $\theta := \sqrt[3]{175}$ ed $\eta := \sqrt[3]{245}$. Dando per noto che una base intera per $K := \mathbb{Q}(\theta)$ è $\{1, \theta, \eta\}$, mostrare che non esiste nessun elemento $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tale che $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ sia una base intera per K (e dunque $\mathbb{Z}[\alpha] \subsetneq \mathcal{O}_K$, per ogni $\alpha \in \mathcal{O}_K$).

   Suggerimento: ricordare che le matrici di cambiamento di base sono unimodulari.

4. Sia $I \subseteq \mathcal{O}_K$ un ideale e $\gamma \neq 0$ un suo elemento. Data una base intera $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ di K, mostrare che $\{\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n\}$ è una base di I come $\mathbb{Z}$-modulo se e soltanto se $I = \gamma\mathcal{O}_K$.

5. Sia $I \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ideale generato da 4 e $2\sqrt{2}$. Mostrare che I è un ideale principale, determinare una base di I come $\mathbb{Z}$-modulo e calcolare l'indice $[\mathcal{O}_K : I]$.

6. Sia $I \subseteq \mathcal{O}_K$ un ideale. Mostrare che se $\alpha \in I$ allora $N(\alpha) \in I$.

7. Siano α, $\beta \in \mathcal{O}_K$ tali che $N(\alpha)$, $N(\beta)$ siano relativamente primi. Mostrare che $\alpha\mathcal{O}_K + \beta\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

8. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$ e sia $I = n\mathbb{Z} \oplus (a + m\omega_d)\mathbb{Z} \neq (0)$ un ideale di $\mathcal{O}_K$.

   Dare un esempio in cui $I \neq \mathcal{O}_K$, ma $n\mathcal{O}_K \oplus (a + m\omega_d)\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

9. Nell'anello di interi quadratici $\mathbb{Z}[\omega_d]$ si consideri l'ideale principale generato da ω_d, $I := \omega_d\mathbb{Z}[\omega_d]$.

   (1) Determinare un una base di I (come $\mathbb{Z}$-modulo) del tipo $\{n, \alpha\}$, con $n > 0$ intero.

   (2) Stabilire per quali valori di d risulta $I = \mathbb{Z}[\omega_d]$.

10. Sia $p \geq 2$ un numero primo. Mostrare che un anello commutativo unitario con p elementi è un campo. Dedurne che un ideale di $\mathcal{O}_K$ che ha norma prima è un ideale massimale.

11. $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un campo quadratico. Mostrare che in $\mathcal{O}_K$ ci sono al più due ideali di norma prima p.

12. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{7})$. Determinare gli ideali di $\mathcal{O}_K$ che hanno norma uguale a $p = 2, 3, 7$.