Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2012/2013

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 5 - Fattorizzazione

1. Sia α una radice del polinomio X^3+3X+7 e sia $K := \mathbb{Q}(\alpha)$. Mostrare che α è un elemento irriducibile di $\mathcal{O}_K$.

2. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\omega_d]$ è un dominio euclideo per $d = -1, -2, 2, 3$ (*riguardare il caso* $d = -1$ *ed estendere*).

3. Effettuare la divisione euclidea di $13+18i$ per $5+3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

4. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1+3i)$ e $J = (3-3i)$. Determinare gli ideali $I+J$, IJ e $I \cap J$.

5. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:
$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}.$$

6. Effettuare la divisione euclidea di $\alpha := \frac{7+11i\sqrt{3}}{2}$ per $\beta := 2+i\sqrt{3}$ in $\mathbb{Z}[\omega_{-3}]$.

7. Fattorizzare n in elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\omega_d]$ per:
$n = 26$, $d = -22$; $n = 30$, $d = -29$; $n = 6$, $d = -23$.

8. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[\omega_{-19}]$:
$$35\,,\ 1+i\sqrt{19}\,,\ 2+i\sqrt{19}.$$

9. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\omega_{-5}]$ gli elementi 6 e $2(1+i\sqrt{5})$ non hanno massimo comune divisore.

10. Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a+b\sqrt{d}; a,b \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che:
(1) Se $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un UFD, allora 2 non è un elemento primo.
(2) Se $d \leq -3$, allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è un UFD.
(3) Se $d \equiv 1 \mod 4$, allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è un UFD.