Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2012/2013

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 6 - Unità

1. Sia $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ una soluzione dell'*Equazione di Pell*:

$$X^2 - Y^2 d = 1, \quad d \geq 2.$$

(1) Mostrare che (a, b) è una *soluzione positiva* (cioè $a > 0$ e $b > 0$) se e soltanto se $a + b\sqrt{d} > 1$.

(2) Mostrare che se (a, b) è una soluzione positiva tale che $\alpha := a + b\sqrt{d}$ sia minimale (α si chiama la *soluzione fondamentale*), allora tutte e sole le soluzioni sono $(\pm 1, 0)$, $(\pm a_n, \pm b_n)$, $n \geq 1$, dove $\alpha^n := a_n + b_n\sqrt{d}$.

2. Sia $\epsilon := a + b\omega_d$ un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[\omega_d]$. Mostrare che

• Se $d \neq 5$, $\epsilon > 1$ se e soltanto se $a > 0$ e $b > 0$;

• Se $d = 5$, $\epsilon > 1$ se e soltanto se $\epsilon = \omega_5$ oppure $a > 0$ e $b > 0$.

3. Verificare che:

• la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell $X^2 - 2Y^2 = 1$ è $(3, 2)$ e l'unità fondamentale di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ è $1 + \sqrt{2}$.

• la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell $X^2 - 3Y^2 = 1$ è $(2, 1)$ e l'unità fondamentale di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ è $2 + \sqrt{3}$.

4. Determinare tutti gli elementi associati a $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ e tutti gli elementi associati a $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

5. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$$14 = (\sqrt{2})^2(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(-1 + 2\sqrt{2})(8 + 3\sqrt{2})$$

sono due fattorizzazioni di 14 in elementi primi e determinare quali sono i fattori associati.