Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2012/2013

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 6 - Fattorizzazione di ideali

1. Siano I, J ideali frazionari di A. Mostrare che:

   $$IJ\,; \quad I \cap J\,; \quad I + J\,; \quad (I :_K J) = \{x \in K\,;\, xJ \subseteq I\}$$

   sono ideali frazionari.

2. Sia I un ideale frazionario di A. Mostrare che l'applicazione

   $$\varphi :\ (J :_K I) \longrightarrow Hom_A(I, J)\,; \quad (\varphi(x))(y) = xy$$

   è un isomorfismo di A-moduli.

   Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I) \cong Hom_A(I, A)$ si chiama anche il *duale* di I.

3. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A, allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A, isomorfo all'anello degli endomorfismi di A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.

4. Mostrare che un ideale frazionario invertibile è finitamente generato.

5. Determinare:

   $$(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z})\,, \quad (\mathbb{Z}[i] : (1+i)\mathbb{Z}[i])\,, \quad (\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : 3\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]+(1+2\sqrt{-5})\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]).$$

6. Siano $A \subseteq B$ due anelli e sia I un ideale (risp. un ideale primo) di B. Mostrare che $I \cap A$ è un ideale (risp. un ideale primo) di A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $I \cap A$ può essere primo anche se I non lo è.

7. Sia $G := (3 + 4\sqrt{5})\mathbb{Z} + (2 + \sqrt{5})\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Determinare l'indice di G in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

8. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ e sia $I \neq (0)$ un ideale di $\mathcal{O}_K$ tale che $I \nsubseteq x\mathcal{O}_K$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 1$. Mostrare che

   (1) $I \cap \mathbb{Z} = N(I)\mathbb{Z}$.

   (2) I è primo se e soltanto se $N(I) = p$ è un numero primo.

9. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 14 in elementi irriducibili e l'ideale $14\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

10. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 10 in elementi irriducibili e l'ideale $10\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

11. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento $5 + \sqrt{3}$ in elementi irriducibili e l'ideale $(5 + \sqrt{3})\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

12. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Fattorizzare l'ideale $p\mathcal{O}_K$ in ideali primi per

    $p = 2, 3, 7\,,\ d = 7\ \ ;\ \ p = 2\,,\ d = 47\ \ ;\ \ p = 23\,,\ d = 37\ \ ;\ \ p = 11\,,\ d = -163$.