Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2012/2013

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 8 - Fattorizzazione di ideali

1. Sia $m(X) = X^3 - 4X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ e sia θ una sua radice.

   (1) Verificare che $m(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Posto $K = \mathbb{Q}(\theta)$, dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

   (3) Fattorizzare gli ideali $p\mathcal{O}_K$ per $p = 2, 3, 5$.

2. Sia $p(X) := X^3 + X^2 + 5X - 16$.

   (1) Verificare che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Sapendo che il discriminante di $p(X)$ è $D = -3 \times 23 \times 127$, mostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

   (3) Fattorizzare in ideali primi l'ideale principale di $\mathcal{O}_K$ generato da $\theta - 4$.

3. Si ξ una radice primitiva quinta dell'unità. Fattorizzare l'ideale $p\mathbb{Z}[\xi]$ in ideali primi di $\mathbb{Z}[\xi]$ per $p \leq 13$ primo.

4. Mostrare che un campo di numeri di grado dispari non contiene alcuna radice n-sima primitiva dell'unità per $n \geq 2$.

5. Sia $p \geq 2$ primo. Mostrare che $\sin(\frac{k\pi}{p})/\sin(\frac{\pi}{p})$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[\xi_p]$.

6. Sia $K = \mathbb{Q}(\xi_8)$ l'ottavo ampliamento ciclotomico. Mostrare che non ci sono numeri primi inerti in $\mathcal{O}_K$.