Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2014/2015

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 2 - Traccia, Norma e Discriminante

1. Calcolare l'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ per $d = 3, -3, 6, 7, -11$.

2. Siano $K = \mathbb{Q}(\theta)$ e $\alpha \in \mathcal{O}_K$. Dimostrare che:

   (a) α è invertibile in $\mathcal{O}_K$ se e soltanto se $|N(\alpha)| = 1$.

   (b) Se $|N(\alpha)| = p$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $\mathcal{O}_K$.

3. Determinare il gruppo delle unità dell'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ per $d \leq -1$.

4. Determinare un elemento α in un anello di interi quadratici tale che $N(\alpha) = 31$, $Tr(\alpha) = 17$.

5. Determinare due elementi di un campo di interi quadratici che hanno stessa norma ma che non sono coniugati.

6. Mostrare che un campo di numeri di grado dispari non contiene alcuna radice n-sima dell'unità per $n \geq 2$.

7. Sia $p \geq 2$ primo. Mostrare che, se p non divide k, $\sin(\frac{k\pi}{p})/\sin(\frac{\pi}{p}) \in \mathbb{Z}[\xi_p]$ ed è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[\xi_p]$.

8. Sia $p \geq 2$ primo. Calcolare la norma di $1 - \xi_p$ in $\mathbb{Q}(\xi_{p^k})$.

9. Siano $\alpha := \sqrt{2}$, $\beta := \sqrt{3}$, $\theta := \alpha + \beta$ e $K := \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. Determinare il discriminante in K delle basi: $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$.

10. Sia $\theta := \sqrt[3]{2}$ e $K := \mathbb{Q}(\theta)$. Determinare il discriminante in K delle basi: $\{1, \theta, \theta^2\}$, $\{3, \theta, \theta^2 + \theta\}$.

11. Calcolare il decimo polinomio ciclotomico ed il suo discriminante.

12. Sia $\alpha \in K := \mathbb{Q}(\theta)$. Mostrare che il discriminante in K della n-pla $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ è uguale al discriminante del polinomio caratteristico di α.

13. Sia $K := \mathbb{Q}(\theta)$. Mostrare che il discriminante in K della n-pla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ è non nullo se e soltanto se $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ è una base di K.

14. Dando per scontato che l'anello degli interi ciclotomici è $\mathbb{Z}[\xi]$, determinare il discriminante dell'ottavo e del quindicesimo ampliamento ciclotomico.

15. Sia $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$ con polinomio minimo $m(X) \in \mathbb{Z}[X]$ e supponiamo che il discriminante D di $m(X)$ non abbia fattori quadratici.

    Dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ e che D è il discriminante del campo K.

16. Sia α una radice del polinomio $f(X) := X^3 + X + 1$. Calcolare il discriminante $\Delta(1, \alpha, \alpha^2)$. Stabilire inoltre se $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ è una base intera di $\mathbb{Q}(\alpha)$.

17. Determinare una base intera di $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.