Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2014/2015

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 4

1. Effettuare la divisione euclidea di $13 + 18i$ per $5 + 3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

2. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1+3i)$ e $J = (3-3i)$. Determinare gli ideali $I + J$, IJ e $I \cap J$.

3. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:
$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}\,, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}\,.$$

4. Effettuare la divisione euclidea di $\alpha := \frac{7+11i\sqrt{3}}{2}$ per $\beta := 2 + i\sqrt{3}$ in $\mathbb{Z}[\omega_{-3}]$.

5. Fattorizzare n in elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\omega_d]$ per:
$n = 26$, $d = -22$; $\quad n = 30$, $d = -29$; $\quad n = 6$, $d = -23$.

6. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[\omega_{-19}]$:
$$35\,,\ 1 + i\sqrt{19}\,,\ 2 + i\sqrt{19}.$$

7. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\omega_2]$
$14 = (\sqrt{2})^2(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(-1 + 2\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})$
sono due fattorizzazioni di 14 in elementi primi e determinare quali sono i fattori associati.

8. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\omega_{-5}]$ gli elementi 6 e $2(1 + i\sqrt{5})$ non hanno massimo comune divisore.

9. Determinare tutti gli elementi associati a $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

10. Dimostrare che:
(1) Se $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un UFD, allora 2 non è un elemento primo.
(2) Se $d \leq -3$, allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è un UFD.
(3) Se $d \equiv 1 \mod 4$, allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è un UFD (*usare* (1)).