Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2014/2015

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 6

1. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 14 in elementi irriducibili e l'ideale $14\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

2. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 10 in elementi irriducibili e l'ideale $10\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

3. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento $5 + \sqrt{3}$ in elementi irriducibili e l'ideale $(5 + \sqrt{3})\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

4. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Fattorizzare l'ideale $p\mathcal{O}_K$ in ideali primi per

   $p = 2, 3, 7\,,\ d = 7\ \ ;\ \ p = 2\,,\ d = 47\ \ ;\ \ p = 23\,,\ d = 37\ \ ;\ \ p = 11\,,\ d = -163$.

5. Sia $m(X) = X^3 - 4X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ e sia θ una sua radice.

   (1) Verificare che $m(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Posto $K = \mathbb{Q}(\theta)$, dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

   (3) Fattorizzare gli ideali $p\mathcal{O}_K$ per $p = 2, 3, 5$.

6. Sia $p(X) := X^3 + X^2 + 5X - 16$.

   (1) Verificare che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Sapendo che il discriminante di $p(X)$ è $D = -3 \times 23 \times 127$, mostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

   (3) Fattorizzare in ideali primi l'ideale principale di $\mathcal{O}_K$ generato da $\theta - 4$.

7. Si ξ una radice primitiva quinta dell'unità. Fattorizzare l'ideale $p\mathbb{Z}[\xi]$ in ideali primi di $\mathbb{Z}[\xi]$ per $p \leq 13$ primo.

8. *Teorema di Dedekind* (1878):

   Sia $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$ con polinomio minimo $m(X) \in \mathbb{Z}[X]$, e sia $d = [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo che non divide d e sia

   $$\overline{m}(X) = \overline{q_1}(X)^{e_1}\overline{q_2}(X)^{e_2} \dots \overline{q_s}(X)^{e_s}$$

   la fattorizzazione di $\overline{m}(X)$ in polinomi irriducibili modulo p (su $\mathbb{F}_p$). Allora, per $i = 1, \dots, s$,

   (1) $P_i = p\mathcal{O}_K + q_i(\theta)\mathcal{O}_K$ è un ideale primo di $\mathcal{O}_K$;

   (2) $P_i \neq P_j$ per $i \neq j$;

   (2) $N(P_i) = p^{\deg(\overline{q_i}(X))}$;

   (3) $p\mathcal{O}_K = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_s^{e_s}$.

   Suggerimento: Osservare che, data una identità di Bezout $1 = pa + db$ in $\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_K/P_i$ è isomorfo a $\mathbb{Z}[\theta]/(p\mathbb{Z}[\theta] + q_i(\theta)\mathbb{Z}[\theta])$ via la moltiplicazione per db. Procedere poi come visto a lezione per il caso $d = 1$, ovvero $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

9. Sia $\pi : A \longrightarrow B$ è un omomorfismo suriettivo di anelli commutativi unitari. Dimostrare che, se P è un ideale primo di A, la sua immagine $\pi(P)$ è un ideale primo di B.

10. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo e sia $q(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio monico irriducibile modulo p. Dimostrare che:

    (1) L'ideale $p\mathbb{Z}[X] + q(X)\mathbb{Z}[X]$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[X]$.

    (2) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, l'ideale $p\mathbb{Z}[\alpha] + q(\alpha)\mathbb{Z}[\alpha]$ è un ideale primo dell'anello $\mathbb{Z}[\alpha]$ (Usare l'Esercizio 9).

    Dedurne che valgono i punti (1) e (2) dell'Esercizio 8.