Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2014/2015

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 7

1. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\omega_d]$ è a fattorizzazione unica per $d = -19, -43, -67, -163$.
2. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{23})$. Verificare che $\mathcal{C}l(\mathcal{O}_K) = 0$.
3. Sia $K := \mathbb{Q}(i\sqrt{23})$. Verificare che $\mathcal{C}l(\mathcal{O}_K)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.
4. Sia $K := \mathbb{Q}(i\sqrt{86})$. Verificare che $\mathcal{C}l(\mathcal{O}_K)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_{10}$.
5. Sia $p(X) := X^3 - X - 1$.
   (1) Verificare che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.
   (2) Posto $K = \mathbb{Q}(\theta)$, dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.
   (3) Verificare che $\mathbb{Z}[\theta]$ è a fattorizzazione unica.
6. Sia $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ il polinomio minimo di $\theta \in \mathbb{C}$ e sia $K := \mathbb{Q}(\theta)$. Supponendo di sapere che se $f(X)$ è un p-Eisenstein l'indice $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$ non è diviso da p, dimostrare che l'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\xi_{p^n})$ è $\mathbb{Z}[\xi_{p^n}]$.
7. Siano $p \geq 2$ primo, $\xi := \xi_{p^n} \in \mathbb{C}$ una radice primitiva p^n-sima dell'unità e $K := \mathbb{Q}(\xi)$.
   (1) Calcolare la norma di $1 - \xi^k$ in $\mathbb{Q}(\xi)$, $k \geq 1$.
   (2) Fattorizzare l'ideale $p\mathcal{O}_K$ in ideali primi.
8. Mostrare che l'anello degli interi di $K := \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$ è $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i, \omega_5]$.