Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2014/2015

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)
Ideali frazionari

Sia A un dominio con campo dei quozienti K.

1. Mostrare che $J \subseteq K$ è un ideale frazionario se e soltanto se $J = \frac{1}{d}I$, dove $I \subseteq A$ è un ideale di A e $d \in A \setminus \{0\}$.

2. Siano I, J ideali frazionari di A. Mostrare che i sotto A-moduli di K
$$IJ\,; \quad I \cap J\,; \quad I + J\,; \quad (I :_K J) = \{x \in K\,;\, xJ \subseteq I\}$$
sono ideali frazionari.

3. Determinare:
$(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z})\,, \quad (\mathbb{Z}[i] : (1{+}i)\mathbb{Z}[i])\,, \quad (\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : 3\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]{+}(1{+}2\sqrt{-5})\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]).$

4. Sia I un ideale frazionario di A. Mostrare che l'applicazione
$$\varphi : (J :_K I) \longrightarrow Hom_A(I, J)\,, \quad (\varphi(x))(y) = xy,$$
è un isomorfismo di A-moduli.
(φ associa ad ogni elemento $x \in (J :_K I)$ la moltiplicazione per x, ovvero l'applicazione $\varphi(x) = \mu_x : I \longrightarrow J\,;\ y \mapsto xy$.)
Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I) \cong Hom_A(I, A)$ si chiama anche il *duale* di I.

5. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A, allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A, isomorfo all'anello degli endomorfismi di A.
Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.

6. Mostrare che:
(1) Un sotto A-modulo finitamente generato di K è un ideale frazionario.
(2) Un ideale frazionario invertibile è finitamente generato.