Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2016/2017

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 1

1. Determinare una base di K su $\mathbb{Q}$ quando K è uno dei seguenti campi:
$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5}+2i)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}).$$

2. Siano $\alpha := \sqrt{3}$, $\beta := \sqrt[3]{2}$. Determinare una matrice A che abbia per autovalori $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$.

3. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$. Posto $\alpha := \sqrt{3}$, $\beta := \sqrt[3]{2}$ e $\theta := \alpha + \beta$,

   (1) Verificare che una base di K su $\mathbb{Q}$ è $\mathcal{B} := \{1, \alpha, \beta, \beta^2, \alpha\beta, \alpha\beta^2\}$.

   (2) Quando $\gamma = \alpha, \beta, \theta$, determinare la matrice associata all'applicazione $\mathbb{Q}$-lineare
$$\mu_\gamma : K \longrightarrow K, \quad x \mapsto \gamma x$$
   rispetto alla base $\mathcal{B}$ ed il suo polinomio caratteristico $f_\gamma(X)$. Confrontare inoltre $f_\gamma(X)$ con il polinomio minimo di γ su $\mathbb{Q}$.

   (3) Determinare la norma e la traccia di γ in K e in $\mathbb{Q}(\gamma)$ per $\gamma = \alpha, \beta, \beta^2, \theta$.

4. Siano $d_1, d_2 \in \mathbb{Q}$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ se e soltanto se $\sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \in \mathbb{Q}$.

   Dedurne che $[K : \mathbb{Q}] = 2$ se e soltanto se $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ con $d \in \mathbb{Z}$ privo di fattori quadratici e univocamente determinato.

5. Siano a, b due interi positivi. Mostrare che
$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}),$$
   per ogni x, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

6. Sia $F := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $K := F(\alpha)$. Determinare un elemento primitivo di K su $\mathbb{Q}$ per $\alpha := \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}$.

7. Determinare i $\mathbb{Q}(\theta)$-coniugati di θ e α per $\theta := \sqrt[4]{3}$ e $\alpha := 1+\theta,\ \theta+\theta^2$.

8. Sia ξ una radice primitiva undicesima dell'unità. Determinare i $\mathbb{Q}(\xi)$-coniugati di $\alpha := \xi + \xi^{-1}$.

9. Sia θ una radice del polinomio $X^3 - 3X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dell'elemento $\alpha = 2\theta^2 - \theta + 2$.

10. Sia θ una radice del polinomio $X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dell'elemento $\alpha = \theta^2 - 2$.

11. Sia K un campo numerico.

    (1) Mostrare che l'applicazione traccia $K \longrightarrow \mathbb{Q}\,; \quad \alpha \mapsto Tr_K(\alpha)$ è suriettiva.

    (2) Mostrare che l'applicazione $K \times K \longrightarrow \mathbb{Q}\,; \quad (\alpha, \beta) \mapsto Tr_K(\alpha\beta)$ è bilineare simmetrica e non degenere.

12. Sia ξ una radice primitiva sesta dell'unità. Calcolare la traccia di ξ in $\mathbb{Q}(\xi)$.

13. Sia p un numero primo e sia $\xi \neq 1$ una radice p-esima dell'unità. Calcolare la norma e la traccia di ξ^k in $\mathbb{Q}(\xi)$, $k \geq 1$.

14. Sia p un numero primo e sia $\xi \neq 1$ una radice p-esima dell'unità. Calcolare la norma di $\alpha := 1 - \xi$ in $\mathbb{Q}(\xi)$.