Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2016/2017

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 2

1. Mostrare che l'anello degli interi di $\mathbb{Q}(i)$ è l'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

2. Determinare il gruppo delle unità dell'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ per $d \leq -1$.

3. Determinare un elemento α in un anello di interi quadratici tale che $N(\alpha) = 31$, $Tr(\alpha) = 17$.

4. Determinare due elementi di un campo di interi quadratici che hanno stessa norma ma che non sono coniugati.

5. Sia $p \geq 2$ primo. Mostrare che, se p non divide k, $\sin(\frac{k\pi}{p})/\sin(\frac{\pi}{p}) \in \mathbb{Z}[\xi_p]$ ed è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[\xi_p]$.

6. Sia $p \geq 2$ primo. Calcolare la norma di $1 - \xi_p$ in $\mathbb{Q}(\xi_{p^k})$.

7. Siano $\alpha := \sqrt{2}$, $\beta := \sqrt{3}$, $\theta := \alpha + \beta$ e $K := \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. Determinare il discriminante in K delle basi: $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$.

8. Sia $\theta := \sqrt[3]{2}$ e $K := \mathbb{Q}(\theta)$. Determinare il discriminante in K delle basi: $\{1, \theta, \theta^2\}$, $\{3, \theta, \theta^2 + \theta\}$.

9. Calcolare il decimo polinomio ciclotomico ed il suo discriminante.

10. Sia $\alpha \in K := \mathbb{Q}(\theta)$ di gardo n su $\mathbb{Q}$. Mostrare che il discriminante in K della n-pla $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ è uguale al discriminante del polinomio caratteristico di α.