Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2016/2017

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 3

1. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (i) $\alpha \in \mathbb{C}$ è un intero algebrico;

   (ii) $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ è un gruppo finitamente generato;

   (iii) Esiste un sottoanello A di $\mathbb{C}$ tale che $(A, +)$ è un gruppo additivo finitamente generato e $\alpha \in A$;

   (iv) Esiste un sottoanello A di $\mathbb{C}$ tale che $(A, +)$ è un gruppo additivo finitamente generato e $\alpha A \subseteq A$.

2. Dimostrare che:

   (a) Se $e_1, \ldots, e_n$ generano $\mathcal{O}_K$ come $\mathbb{Z}$-modulo, allora generano K come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale.

   (b) $e_1, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Z}$ se e solo se sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.

3. Sia $I \subseteq \mathcal{O}_K$ un ideale e $\gamma \neq 0$ un suo elemento. Data una base intera $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ di K, mostrare che $\{\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n\}$ è una base di I come $\mathbb{Z}$-modulo se e soltanto se $I = \gamma\mathcal{O}_K$.

4. Sia $I \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ideale generato da 4 e $2\sqrt{2}$. Mostrare che I è un ideale principale, determinare una base di I come $\mathbb{Z}$-modulo e calcolare l'indice $[\mathcal{O}_K : I]$.

5. Nell'anello di interi quadratici $\mathbb{Z}[\omega_d]$ si consideri l'ideale principale generato da ω_d, $I := \omega_d\mathbb{Z}[\omega_d]$.

   (1) Determinare un una base di I (come $\mathbb{Z}$-modulo) del tipo $\{n, \alpha\}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

   (2) Stabilire per quali valori di d risulta $I = \mathbb{Z}[\omega_d]$.

6. Dando per scontato che l'anello degli interi ciclotomici è $\mathbb{Z}[\xi]$, determinare il discriminante dell'ottavo e del quindicesimo ampliamento ciclotomico.

7. Sia $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta \in \mathcal{O}_K$ con polinomio minimo $m(X) \in \mathbb{Z}[X]$, e supponiamo che il discriminante D di $m(X)$ non abbia fattori quadratici.

   Dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ e che D è il discriminante del campo K.

8. Sia α una radice del polinomio $f(X) := X^3 + X + 1$. Calcolare il discriminante $\Delta(1, \alpha, \alpha^2)$. Stabilire inoltre se $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ è una base intera di $\mathbb{Q}(\alpha)$.

9. Determinare una base intera di $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

10. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}.$$

11. Sia $p \geq 3$ un numero primo e $I := p\mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che l'anello quoziente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{I}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2 sul campo $\mathbb{F}_p$ con p elementi.

12. Fattorizzare n in elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\omega_d]$ per:

    $n = 26$, $d = -22$; $\quad n = 30$, $d = -29$; $\quad n = 6$, $d = -23$.