Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2016/2017

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 4

Nel seguito A indica un dominio con campo dei quozienti K. Un *ideale frazionario* di A è un sotto A-modulo I di K tale che $(A :_A I) \neq (0)$.

1. Mostrare che I è un ideale frazionario se e soltanto se $I = \dfrac{1}{d}J$, dove $J \subseteq A$ è un ideale e $d \in A \setminus \{0\}$;

2. Mostrare che ogni sotto A-modulo di un ideale frazionario è un ideale frazionario.

3. Siano I, J ideali frazionari di A. Mostrare che IJ, $I \cap J$, $I + J$ e $(I :_K J) = \{x \in K\, ;\, xJ \subseteq I\}$ sono ideali frazionari.

4. Sia I un ideale frazionario di A. Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : \ (A :_K I) \longrightarrow Hom_A(I, A)\, ;\ (\varphi(x))(y) = xy$$

   è un isomorfismo di A-moduli.

   (φ associa ad ogni elemento $x \in (J :_K I)$ la moltiplicazione per x, ovvero l'applicazione $\varphi(x) = \mu_x : I \longrightarrow J; y \mapsto xy$.)

   Per questo motivo l'ideale frazionario $(A :_K I)$ si dice anche il *duale* di I.

5. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A, allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A, isomorfo all'anello degli endomorfismi di A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necessariamente un anello.

6. Mostrare che

   (1) Se I è un sotto A-modulo di K finitamente generato, allora I è un ideale frazionario;

   (2) Un ideale frazionario invertibile è finitamente generato.

7. Determinare:

   $$(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z})\,, \quad (\mathbb{Z}[i] : (1+i)\mathbb{Z}[i])\,, \quad (\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : 3\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]+(1+2\sqrt{-5})\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]).$$

8. Siano $A \subseteq B$ due anelli e sia I un ideale (risp. un ideale primo) di B. Mostrare che $I \cap A$ è un ideale (risp. un ideale primo) di A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $I \cap A$ può essere primo anche se I non lo è.

9. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ e sia $I \neq (0)$ un ideale di $\mathcal{O}_K$ tale che $I \nsubseteq a\mathcal{O}_K$, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$. Mostrare che

   (1) $I \cap \mathbb{Z} = N(I)\mathbb{Z}$.

   (2) I è primo se e soltanto se $N(I) = p$ è un numero primo.

10. Sia $G := (3 + 4\sqrt{5})\mathbb{Z} + (2 + \sqrt{5})\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Determinare l'indice di G in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

11. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$ e sia $I = n\mathbb{Z} \oplus (a + m\omega_d)\mathbb{Z} \neq (0)$ un ideale di $\mathcal{O}_K$.

    Dare un esempio in cui $I \neq \mathcal{O}_K$, ma $\langle n, a + m\omega_d\rangle = n\mathcal{O}_K + (a + m\omega_d)\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

12. $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un campo quadratico. Mostrare che in $\mathcal{O}_K$ ci sono al più due ideali di norma prima p.

13. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{7})$. Determinare gli ideali di $\mathcal{O}_K$ che hanno norma uguale a $p = 2, 3, 7$.

14. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{21})$. Determinare gli ideali di $\mathcal{O}_K$ che hanno norma uguale a $p = 2, 3, 11$.

15. Siano α, $\beta \in \mathcal{O}_K$ tali che $N(\alpha)$, $N(\beta)$ siano relativamente primi. Mostrare che $\alpha\mathcal{O}_K + \beta\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

16. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 14 in elementi irriducibili e l'ideale $14\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

17. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 10 in elementi irriducibili e l'ideale $10\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

18. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento $5+\sqrt{3}$ in elementi irriducibili e l'ideale $(5+\sqrt{3})\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

19. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Fattorizzare l'ideale $p\mathcal{O}_K$ in ideali primi per

    $p = 2, 3, 7\,,\ d = 7$; $p = 2\,,\ d = 47$; $p = 23\,,\ d = 37$; $p = 11\,,\ d = -163$.