Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2016/2017

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 6

1. Effettuare la divisione euclidea di $13+18i$ per $5+3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

2. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I=(1+3i)$ e $J=(3-3i)$. Determinare gli ideali $I+J$, IJ e $I\cap J$.

3. Effettuare la divisione euclidea di $\alpha := \frac{7+11i\sqrt{3}}{2}$ per $\beta := 2+i\sqrt{3}$ in $\mathbb{Z}[\omega_{-3}]$.

4. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[\omega_{-19}]$:
$$35\,,\ 1+i\sqrt{19}\,,\ 2+i\sqrt{19}.$$

5. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\omega_2]$
$$14=(\sqrt{2})^2(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})$$
sono due fattorizzazioni di 14 in elementi primi e determinare quali sono i fattori associati.

6. Mostrare che in $\mathbb{Z}[\omega_{-5}]$ gli elementi 6 e $2(1+i\sqrt{5})$ non hanno massimo comune divisore.

7. Determinare tutti gli elementi associati a $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

8. Determinare tutti gli elementi associati $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

9. Dimostrare che:
   (1) Se $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un UFD, allora 2 non è un elemento irriducibile.
   (2) Se $d\le -3$, allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è un UFD.
   (3) Se $d\equiv 1 \mod 4$, allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è un UFD (*usare* (1)).

10. Sia $p\ge 3$ primo. Mostrare che il gruppo delle radici dell'unità contenuto in $\mathbb{Z}[\xi_p]$ è il gruppo delle radici $2p$-esime dell'unità.

Richiami sulle Equazioni di Pell:

L'equazione diofantea

$$(*) \qquad X^2 - Y^2 d = 1, \quad d \geq 2$$

è detta *Equazione di Pell*.

1. Sia $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ una soluzione dell'Equazione di Pell $(*)$:

   • Mostrare che (a, b) è una *soluzione positiva* (cioè $a > 0$ e $b > 0$) se e soltanto se $a + b\sqrt{d} > 1$.

   • Mostrare che se (a, b) è la soluzione positiva tale che $\alpha := a + b\sqrt{d}$ sia minimale (α si chiama la *soluzione fondamentale*), posto $\alpha^n := a_n + b_n\sqrt{d}$, tutte e sole le soluzioni di $(*)$ sono $(\pm 1, 0)$, $(\pm a_n, \pm b_n)$, $n \geq 1$, per tutte le possibili scelte di segno.

2. Sia $\epsilon := a + b\omega_d$ un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[\omega_d]$. Mostrare che

   • Se $d \neq 5$, $\epsilon > 1$ se e soltanto se $a > 0$ e $b > 0$;

   • Se $d = 5$, $\epsilon > 1$ se e soltanto se $\epsilon = \omega_5$ oppure $a > 0$ e $b > 0$.

3. Mostrare che

   • Se $d = a^2 - 1$, $a \geq 1$, la soluzione fondamentale dell'Equazione di Pell è $(a, 1)$.

   • Se $d = a(a + 1)$, $a \geq 1$, la soluzione fondamentale dell'Equazione di Pell è $(2a + 1, 2)$.

4. Verificare che:

   • Se $d = 2$, la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell è $(3, 2)$ e l'unità fondamentale di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ è $1 + \sqrt{2}$.

   • Se $d = 3$, la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell è $(2, 1)$ e l'unità fondamentale di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ è $2 + \sqrt{3}$.

   • Se $d = 10$, la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell è $(19, 6)$.

   • Se $d = 11$, la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell è $(10, 3)$.

5. Mostrare che, se (x, y) è una soluzione positiva dell'equazione di Pell, allora
$$\mid \frac{x}{y} - \sqrt{d} \mid < \frac{1}{y^2}.$$

---

1. Sia p un numero primo tale che $p \equiv 3 \mod 4$. Mostrare che l'equazione diofantea $X^2 - Y^2 p = -1$ non è risolubile (non ha soluzioni $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

2. Supponiamo che l'equazione diofantea
$$(**) \qquad X^2 - Y^2 d = -1, \quad d \geq 2$$
sia risolubile.

   • Mostrare che esiste sempre una soluzione positiva minimale di $(**)$, cioè una soluzione $(u, v) \geq (1, 1)$ tale che $u + v\sqrt{d}$ sia minimo (*soluzione fondamentale*).

   Posto $(u + v\sqrt{d})^n = u_n + v_n\sqrt{d}$, mostrare che

   • Se (u, v) è una soluzione fondamentale di $(**)$, allora (u_2, v_2) è una soluzione fondamentale dell'equazione di Pell $(*)$.

   • Tutte e sole le soluzioni di $(**)$ sono le coppie $(\pm u_{2n+1}, \pm v_{2n+1})$, con $n \geq 0$, per tutte le possibili scelte di segno.