Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2014/2015

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 7

1. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\omega_d]$ è a fattorizzazione unica per $d = -19, -43, -67, -163$.

2. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{23})$. Verificare che $\mathcal{C}l(\mathcal{O}_K) = 0$.

3. Sia $K := \mathbb{Q}(i\sqrt{23})$. Verificare che $\mathcal{C}l(\mathcal{O}_K)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

4. Sia $K := \mathbb{Q}(i\sqrt{86})$. Verificare che $\mathcal{C}l(\mathcal{O}_K)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_{10}$.

5. Sia $p(X) := X^3 - X - 1$.

   (1) Verificare che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

   (2) Posto $K = \mathbb{Q}(\theta)$, dimostrare che $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

   (3) Verificare che $\mathbb{Z}[\theta]$ è a fattorizzazione unica.

6. Supponendo noto che l'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$ è $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{6}]$, determinare gli ideali primi che dividono l'ideale $5\mathbb{Z}[\sqrt[3]{6}]$ e verificare che essi sono tutti principali.

7. Sia $p \geq 2$ primo e $m = p^k n$ con $(p, n) = 1$, $k \geq 1$. Se $K = \mathbb{Q}(\xi_m)$, mostrare che $p\mathcal{O}_K = (P_1 \cdots P_g)^{\varphi(p^k)}$ e che $fg = \varphi(n)$, dove f è il grado di P_i.

8. Sia $K = \mathbb{Q}(\xi_8)$. Mostrare che non ci sono numeri primi inerti in $\mathcal{O}_K$.

9. Siano $K = \mathbb{Q}(\xi_m)$, $p \geq 3$ un numero primo e $P \subseteq \mathcal{O}_K$ un ideale primo che divide $p\mathcal{O}_K$.

   Mostrare che, se P è non ramificato, $\sigma_p : K \longrightarrow K$, $\xi_m \mapsto \xi_m^p$ è un automorfismo di K e $S(P) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K)\,;\ \sigma(P) = P\}$ è ciclico generato da σ_p.